

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 40.

1. *Zur Theorie
der unvollkommenen Dielektrika¹⁾;
von Karl Willy Wagner.*

(Mitteilung aus dem Kaiserlichen Telegraphen-Versuchsam.)

§ 1. Einleitende Bemerkungen.

Unter einem „vollkommenen“ Dielektrikum wollen wir ein solches verstehen, dessen Verhalten im elektrischen Felde mit Hilfe der beiden Begriffe „Dielektrizitätskonstante“ und „Leitfähigkeit“ erschöpfend beschrieben werden kann. Es ist bekannt, daß dies bei den festen und flüssigen Isolatoren nicht möglich ist. Wenn man trotzdem in der Elektrizitätslehre das Gedankenmodell des vollkommenen Dielektrikums vielfach anwendet, so rechtfertigt sich dies einfach darin, daß bei den fraglichen Betrachtungen und Anwendungen die Unterschiede im Verhalten des Modells und des wirklichen Stoffes nicht erheblich sind. Neuerdings ist aber die Technik zu Betriebszweigen fortgeschritten, bei denen diese Unterschiede sehr ins Gewicht fallen. In allen diesen Fällen handelt es sich in erster Linie um die *Energieverluste*, die sich ergeben, wenn das Dielektrikum einem *elektrischen Wechselfelde* ausgesetzt wird. Sie sind bedeutend größer als die aus der Leitfähigkeit zu berechnende Joulesche Wärme, und das erwähnte Gedankenmodell gibt von ihnen keine Rechenschaft.

So werden z. B. in der *Starkstromtechnik* die dielektrischen Verluste trotz der geringen Frequenz von meist 50 Perioden in den Kabeln für sehr hohe Spannungen bereits fühlbar.²⁾ Eine erheblich größere Rolle spielen sie in der *Fernsprech-*

1) Nach einem Vortrage vor der Deutsch. Physik. Ges. zu Berlin am 6. Dezember 1912.

2) Vgl. z. B. P. Humann, *Elektr. Bahnen und Betriebe* p. 457. 1906; M. Höchstädt, *Elektrotechn. Zeitschr.* p. 467. 1910.

technik wegen der höheren Frequenz der Fernsprechströme (mittlere Frequenz 800). In der Hochfrequenztechnik sind sie oft bestimmend für den Wirkungsgrad einer Anordnung. Auch in der Wechselstromtechnik macht sich ihr Einfluß geltend, und zwar in um so stärkerem Maße, je höher die Frequenz ist; außerdem kommt hier als zweite störende Erscheinung die Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstante von der Frequenz in Frage.

Es ist daher verständlich, daß neuerdings das Verhalten der Dielektrika im elektrischen Wechselfelde im Vordergrunde des Interesses steht, während die älteren Untersuchungen vorwiegend die Eigenschaften dieser Stoffe bei Gleichstrom zum Gegenstande hatten. Die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeiten sind in einer ausgezeichneten Abhandlung zusammengestellt und gewürdigt, die v. Schweidler vor einiger Zeit veröffentlicht hat.¹⁾ Die dort mitgeteilte Literaturübersicht mag eine Vorstellung von dem Umfange der Arbeit geben, die bereits auf das Studium der dielektrischen Erscheinungen verwendet worden ist.

Als Quellen der Energieverluste im wirklichen Dielektrikum kommen hauptsächlich die folgenden in Frage.

1. *Die normale, d. h. das Ohmsche Gesetz befolgende Leitfähigkeit.* Wäre sie allein vorhanden, so hätte man das Dielektrikum als vollkommenes zu bezeichnen. Tatsächlich spielt sie bei den meisten Isolierstoffen gegenüber den anderen Verlustquellen nur eine bescheidene Nebenrolle.

2. In gewissen sehr schlecht leitenden flüssigen Stoffen wird eine besondere Art von *Leitfähigkeit* beobachtet, die sich der *Leitfähigkeit dichter Gase* sehr ähnlich verhält, d. h. z. B. durch äußere Ionisatoren beeinflußt wird, wahrscheinlich sogar allein von ihnen herrührt und die Erscheinung des Sättigungsstromes aufweist. Sie wurde zuerst von Jaffé am Hexan nachgewiesen²⁾, nachdem dieses weitgehend gereinigt worden war; andernfalls wird sie von der durch die Verunreinigungen bedingten elektrolytischen Leitfähigkeit vollkommen überdeckt.

1) E. v. Schweidler, Ann. d. Phys. 24. p. 711. 1907.

2) G. Jaffé, Ann. d. Phys. 28. p. 326. 1909.

3. Ein eigentümliches Verhalten weist, wie Maxwell¹⁾ gezeigt hat, ein Dielektrikum auf, das aus *Schichten zusammengesetzt* ist. Jede Schicht soll aus einem homogenen und vollkommenen Dielektrikum bestehen; die *Relaxationszeiten*²⁾ der einzelnen Schichten sollen aber verschieden sein. Ein derartig zusammengesetztes Dielektrikum zeigt die Erscheinung des *Rückstandes*, wenn es einem elektrischen Felde ausgesetzt wird, das auf den Schichten senkrecht steht. Im elektrischen Wechselfelde ergeben sich zusätzliche Energieverluste, die von der Frequenz abhängen, und die durch die resultierende Leitfähigkeit allein nicht erklärt werden könnten. Diese Erscheinung kann unter Umständen eine praktische Bedeutung erlangen. So besitzen z. B. Glimmerkondensatoren, bei denen sich zwischen den Belegungen und dem Glimmer eine merkliche Klebstoffsschicht (Schellack oder dergl.) befindet, beträchtlich schlechtere Eigenschaften als gleichartige Kondensatoren, bei denen eine solche Schicht möglichst vermieden ist.

4. Wohl die praktisch wichtigste Eigentümlichkeit homogener Dielektrika ist die *dielektrische Nachwirkung*. Hinter ihr treten in vielen Fällen die vorher erwähnten Erscheinungen meist derart zurück, daß sie das Verhalten des Dielektrikums so gut wie allein beherrscht. Mit ihr befaßt sich die vorliegende Untersuchung ausschließlich.

Sie ist wohl zuerst von Maxwell als wohlbestimmte physikalische Erscheinung erkannt worden. J. Hopkinson³⁾ hat ein Superpositionsgesetz für die dielektrische Nachwirkung aufgestellt, das den von L. Boltzmann⁴⁾ für die elastische Nachwirkung gefundenen Beziehungen vollkommen entspricht. Neuerdings hat v. Schweidler⁵⁾ dem Hopkinsonschen Gesetze eine besondere Form gegeben, die zugleich eine Erweiterung

1) J. C. Maxwell, Lehrbuch d. Elektriz. und des Magnetismus 1. Art. 328—380. Berlin 1883.

2) Die Relaxationszeit ist dem Verhältnis der Dielektrizitätskonstante zur Leitfähigkeit proportional; vgl. Cohn, Das elektromagn. Feld p. 128. Leipzig 1900.

3) J. Hopkinson, Phil. Trans. 166. p. 489. 1876; 167. p. 599. 1877/78; Phil. Mag. (5) 2. p. 814. 1876.

4) L. Boltzmann, Wien. Ber. (2) 70. p. 275, 381. 1874.

5) E. v. Schweidler, Ann. d. Phys. 24. p. 711. 1907.

eines von Pellat¹⁾ aufgestellten Ansatzes bedeutet, und die sich zur Darstellung empirisch gefundener Beziehungen besser eignet als die Hopkinsonischen Formeln. Außerdem hat v. Schweißler bei seinen Versuchen gefunden, daß das Superpositionsge setz nur für *feste* Dielektrika gültig ist.

Die Ansätze von Hopkinson und v. Schweißler ergeben zwar gewisse allgemeine Beziehungen, lassen jedoch den *speziellen Verlauf der dielektrischen Nachwirkung* unbestimmt. Im folgenden wird ein verhältnismäßig einfaches Gesetz für diesen Verlauf mitgeteilt, welches mit den bisher bekannt gewordenen Beobachtungstatsachen bei *festen* Körpern in gutem Einklange steht. Die vollkommene Analogie dieses Gesetzes mit dem Gesetze, das Wiechert für die elastische Nachwirkung gefunden hat²⁾, läßt auf eine gewisse Wesensverwandtschaft dieser Nachwirkungsvorgänge schließen. Eine solche ist auch bereits von Wiechert vermutet worden.³⁾ Um die Analogie klar hervortreten zu lassen, werde ich mich im folgenden der Wiechertschen Darstellungsweise so weit anschließen, als dies bei der Verschiedenheit der Erscheinungsgebiete überhaupt möglich ist.

Nach der Aufstellung des allgemeinen Nachwirkungs gesetzes werden die Folgerungen daraus gezogen werden, die sich für das Verhalten des Dielektrikums bei *Gleichstrom* und *Wechselstrom* ergeben. Insbesondere werden Formeln zur Berechnung des Rückstandsstromes im konstanten Felde und der Abhängigkeit der Kapazität und der dielektrischen Energie verluste von der Frequenz entwickelt. Für die Abhängigkeit der Nachwirkung von der *Temperatur* werden einfache Beziehungen mitgeteilt.

Beim Vergleich mit der Erfahrung wird sich zeigen, daß die Theorie das dielektrische Verhalten *fester* Körper in befriedigender Weise darstellt. Sie lehrt z. B. auch ein bekanntes empirisches Nachwirkungsgesetz als Näherungsformel mit be-

1) H. Pellat, Compt. Rend. 128. p. 1312. 1899; Ann. de chim. et phys. (7) 18. p. 150. 1899.

2) E. Wiechert, Diss. Königsberg 1889; Wied. Ann. 50. p. 835, 546. 1898.

3) E. Wiechert, Sitzungsber. d. phys.-ökonom. Ges. Königsberg 34. Sitzung vom 2. Nov. 1898.

grenztem Geltungsbereich kennen und beseitigt damit gewisse Schwierigkeiten, die sich bei der Voraussetzung eines unbegrenzten Geltungsbereiches jener Formel ergeben würden.¹⁾

Dagegen fällt das dielektrische Verhalten flüssiger Isolatoren aus dem Rahmen der hier gegebenen Theorie heraus, wenngleich nicht zu erkennen ist, daß es auch manche Züge aufweist, die dem dielektrischen Verhalten fester Körper ähnlich sind.

§ 2. Allgemeines Bild der dielektrischen Nachwirkung.

Im folgenden wird von der normalen Leitfähigkeit stets abgesehen; ist sie vorhanden, so sind ihre Wirkungen den übrigen einfach zu superponieren.

In einem *vollkommenen Dielektrikum* ruft ein elektrisches Feld von der Stärke E bekanntlich eine der Feldstärke proportionale *dielektrische Verschiebung* D von der Stärke

$$(1) \quad D = \frac{\epsilon}{4 \pi c^2} E$$

hervor. ϵ ist die Dielektrizitätskonstante; $c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/sec}$; E und D sind also in absoluten elektromagnetischen Einheiten ausgedrückt. Durch Differentiation von (1) nach der Zeit t erhält man die Dichte des Verschiebungsstromes

$$(2) \quad i = \frac{dD}{dt} = \frac{\epsilon}{4 \pi c^2} \frac{dE}{dt}.$$

Handelt es sich um das Feld eines geschlossenen Kondensators, so folgt aus (1) die ebenfalls wohlbekannte Beziehung

$$(1a) \quad Q = CV$$

zwischen der Ladung Q und der Spannung V des Kondensators. Durch Differentiation ergibt sich weiter der *Ladestrom* oder *Verschiebungsstrom*

$$(2a) \quad I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt}.$$

Für den speziellen Fall einer *rein periodischen einwelligen Spannung*

$$V = V_0 \sin \omega t$$

1) E. v. Schweidler, l. c. p. 715, 745.

ergibt sich

$$(2\text{b}) \quad I = C V_0 \omega \cos \omega t = C V_0 \omega \sin (\omega t + 90^\circ).$$

Die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom beträgt 90° ; der Mittelwert der im Dielektrikum verzehrten Leistung ist daher gleich Null.

Wird ein *unvollkommenes* Dielektrikum, das während einer genügend langen Zeit vor dem Einflusse elektrischer Felder geschützt worden ist, plötzlich einem konstanten Felde von der Stärke E_0 unterworfen, so entsteht gleichzeitig mit dem Felde eine dielektrische Verschiebung vom Betrage

$$(3) \quad \mathfrak{D}(0) = \frac{\epsilon}{4\pi c^2} E_0.$$

Damit ist der Vorgang jedoch nicht beendet; die Verschiebung wächst vielmehr weiter (Fig. 1), zuerst schnell, dann langsam, um schließlich einem „*Endwerte*“ $\mathfrak{D}(\infty)$ zuzustreben, der den „*Anfangswert*“ $\mathfrak{D}(0)$ um einen gewissen Bruchteil k übersteigt:

$$(4) \quad \mathfrak{D}(\infty) = (1 + k) \mathfrak{D}(0) = \frac{\epsilon}{4\pi c^2} (1 + k) E_0.$$

In der Zwischenzeit wollen wir die Verschiebung durch die Gleichung

$$(5) \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\infty) + \mathfrak{D}'$$

darstellen. \mathfrak{D}' ist eine Größe, die sich dem Endwerte überlagert und im Laufe der Zeit allmählich abstirbt; wir wollen sie „*Ausgleichsverschiebung*“ nennen. Sie ist im vorliegenden Falle negativ.

Nachdem die Verschiebung ihren Endwert $\mathfrak{D}(\infty)$ merklich erreicht hat, werde das elektrische Feld im Zeitpunkt t_1 plötzlich auf Null gebracht (der Kondensator wird kurz geschlossen). Dann sinkt die Verschiebung im Zeitpunkt t_1 plötzlich um den Betrag $\mathfrak{D}(0)$, während der Rest $k \mathfrak{D}(0)$ im weiteren Verlaufe der Zeit allmählich abklingt (Fig. 2). Dementsprechend fließt im Entladungskreise nach dem Zeitpunkt t_1 noch ein Entladestrom oder Rückstandsstrom

$$I = q \frac{d\mathfrak{D}}{dt},$$

der durch die punktierte Kurve veranschaulicht wird (q = Querschnitt).

Unterbricht man die Entladung, bevor sie vollständig beendet ist, so erscheint auf den Kondensatorplatten die sogenannte „Rückstandsladung“, die der im Augenblicke der

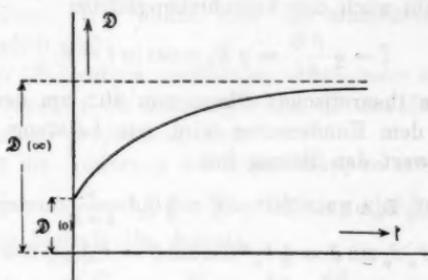


Fig. 1.

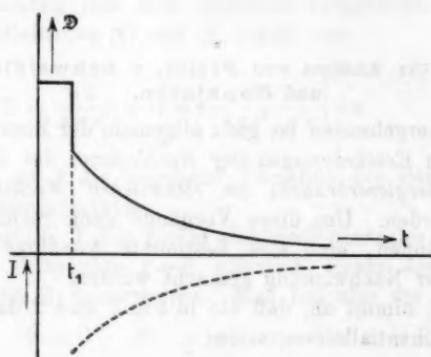


Fig. 2.

Stromunterbrechung noch vorhandenen dielektrischen Verschiebung entspricht. Zugleich beginnt sich in dem Dielektrikum ein elektrisches Feld zu entwickeln, das einem Endwerte zustrebt.

Aus der Tatsache, daß von der Verschiebung D nur der Teil $D(0)$ den Änderungen der Feldstärke sofort folgt, der Rest aber zeitlich hinter ihr zurückbleibt, folgt, daß in einem Wechselfelde

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \sin \omega t$$

die Verschiebung hinter der Feldstärke \mathfrak{E} um einen gewissen Phasenwinkel δ nachbleiben muß: ¹⁾

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 \sin(\omega t - \delta).$$

Deshalb bleibt auch der Verschiebungsstrom

$$I = q \frac{d\mathfrak{D}}{dt} = q \mathfrak{D}_0 \omega \cos(\omega t - \delta)$$

hinter seiner theoretischen Phase von 90° um den Winkel δ zurück. In dem Kondensator wird nun Leistung verbraucht, deren Mittelwert den Betrag hat

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{2} \mathfrak{E}_0 \mathfrak{D}_0 \omega v \cos(90^\circ - \delta) = \frac{1}{2} \mathfrak{E}_0^2 \frac{s}{4 \pi c^2} \omega v \sin \delta \\ \quad = \frac{1}{2} V_0 I_0 \sin \delta = \frac{1}{2} V_0^2 C \omega \sin \delta = V_{\text{effektiv}}^2 C \omega \sin \delta. \end{array} \right.$$

$v = s q$ ist das Volum des Kondensators. Der Winkel δ ist der sogenannte *Verlustwinkel* des Dielektrikums für die Kreisfrequenz ω .

§ 3. Die Ansätze von PELLAT, v. SCHWEIDLER und HOPKINSON.

Im vorhergehenden ist ganz allgemein der Zusammenhang zwischen den Erscheinungen der *Nachladung*, des *Rückstandes* und des *Energieverbrauchs im elektrischen Wechselfelde* besprochen worden. Um diese Vorgänge auch rechnerisch erfassen zu können, muß eine bestimmte Annahme über das Zeitgesetz der Nachwirkung gemacht werden.

PELLAT ²⁾ nimmt an, daß die in Fig. 1 und 2 dargestellten Kurven Exponentalkurven seien:

$$(7) \quad \mathfrak{D}' = \mathfrak{D}'(0) e^{-\frac{t}{T}}.$$

T heiße die „*Relaxationszeit*“ oder die „*Zeitkonstante*“ des Vorganges. Diese Annahme entspricht einer Differentialgleichung

$$(8) \quad \frac{d\mathfrak{D}'}{dt} = -\frac{\mathfrak{D}'}{T},$$

die besagt, daß die Geschwindigkeit der Abnahme von \mathfrak{D}' dem jeweils noch vorhandenen Werte dieser Größe proportional ist.

1) Die Annahme einer Sinusfunktion der Zeit für \mathfrak{D} rechtfertigt sich freilich erst durch die im folgenden (§ 3) mitgeteilten Betrachtungen.

2) H. PELLAT, Ann. de Chim. et Phys. 18. p. 150. 1899.

Die Gleichung (8) gilt im konstanten Felde. Ändert sich auch das Feld selbst, so lagert sich über dem freiwilligen Absterben der Ausgleichsverschiebung \mathfrak{D}' (nach Gleichung (8)) eine erzwungene Änderung von \mathfrak{D}' , die von der Änderung der Feldstärke herrührt. Wir wollen hier die einfachste Annahme¹⁾ treffen, nämlich daß

1. beide Änderungen unabhängig voneinander verlaufen;
2. die erzwungenen Änderungen von \mathfrak{D}' den Änderungen der Feldstärke direkt proportional sind.

Ist $d\mathfrak{E}$ die Änderung der Feldstärke, so setzen wir also die erzwungene Änderung der Verschiebung gleich $-\frac{k\mathfrak{E}}{4\pi c^2} d\mathfrak{E}$ und erhalten hiermit den Ansatz

$$(9) \quad \frac{d\mathfrak{D}'}{dt} = -\frac{\mathfrak{D}'}{T} - \frac{k\mathfrak{E}}{4\pi c^2} \frac{d\mathfrak{E}}{dt}.$$

Diese Gleichung lässt sich allgemein integrieren. Mit Rücksicht auf Gleichung (4) und (5) erhält man

$$(10) \quad \mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{E}}{4\pi c^2} + \int_{-\infty}^t d\tau \frac{\mathfrak{E}}{4\pi c^2} \frac{d}{d\tau} \left[k e^{-\frac{t-\tau}{T}} \right].$$

Darin ist \mathfrak{E} als (gegebene) Funktion der Zeit gedacht, τ die Integrationsvariable.

Spezialfälle. I. Ein vorher elektrisch neutrales Dielektrikum werde im Zeitpunkte $t = 0$ plötzlich einem konstanten elektrischen Felde \mathfrak{E}_0 unterworfen. Man hat also die Werte

$$\mathfrak{E} = 0 \quad \text{für } \tau = -\infty \text{ bis } \tau = 0$$

und

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \quad \text{für } \tau = 0 \text{ bis } \tau = t$$

in Gleichung (10) einzusetzen und erhält dann den Pellatschen Ausdruck

$$(11) \quad \mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{E}_0}{4\pi c^2} \left[1 + k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \right].$$

II. Für ein elektrisches Wechselfeld

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 \sin \omega t$$

1) W. Weber, Pogg. Ann. 54. p. 1. 1841; Cl. Maxwell, Phil. Trans. 157. p. 52. 1867; Scient. Papers 2. p. 80. 1890.

ergibt sich

$$(12) \quad \mathfrak{D} = \frac{s \mathfrak{E}_0}{4 \pi \epsilon^2} \left[\left(1 + \frac{k}{1 + \omega^2 T^2} \right) \sin \omega t - \frac{k \omega T}{1 + \omega^2 T^2} \cos \omega t \right].$$

An diesem Ausdruck ist folgendes bemerkenswert:

1. Die Sinuskomponente der Verschiebung, die in Phase mit dem elektrischen Felde liegt und den *reinen Ladestrom* ergibt, enthält ein vom Rückstand herrührendes Zusatzglied. Wir wollen mit Curtis¹⁾ unter der *geometrischen Kapazität* C eines Kondensators mit unvollkommenem Dielektrikum die Kapazität verstehen, die sich ohne Rückstand ergeben würde. Dann lehrt der vorstehende Ausdruck, daß der Kondensator infolge der Nachwirkung eine Zunahme seiner Kapazität aufweist, deren verhältnismäßiger Betrag bei der Frequenz ω durch den Ausdruck

$$(13) \quad \frac{A C}{C} = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2}$$

gegeben wird. Er nimmt mit steigender Frequenz beständig ab.

2. Die Kosinuskomponente bestimmt den dielektrischen Verlust. Aus dem Stärkeverhältnis der beiden Komponenten erhält man die Tangente des Verlustwinkels

$$(14) \quad \left(1 + \frac{A C}{C} \right) \operatorname{tg} \delta = \frac{k \omega T}{1 + \omega^2 T^2}.$$

Die durch (13) bzw. (14) ausgedrückte Abhängigkeit der Kapazität und des Verlustwinkels von der Frequenz wird durch die Figg. 3 und 4 veranschaulicht.

Da der von Pellat angenommene exponentielle Verlauf der Nachwirkung im konstanten Felde (und auch die daraus gefolgerten Frequenzgesetze für die Kapazität und den Verlustwinkel) mit den Versuchsergebnissen nicht im Einklang stehen, hat von Schweidler den Pellatschen Ansatz erweitert.²⁾ Er setzt

$$(15) \quad \mathfrak{D}' = \sum_n \mathfrak{D}'_n.$$

Jedes Glied \mathfrak{D}'_n soll für sich einer Differentialgleichung der Form (9) genügen:

$$(9a) \quad \frac{d \mathfrak{D}'_n}{d t} = - \frac{\mathfrak{D}'_n}{T_n} - \frac{k_n s}{4 \pi \epsilon^2} \frac{d \mathfrak{E}}{d t}.$$

1) H. L. Curtis, Bull. of the Bur. of Stand. Washington 6. p. 471. 1910.

2) E. v. Schweidler, Ann. d. Phys. 24. p. 711. 1904.

Amplitude k_n und Zeitkonstante T_n sind jedoch im allgemeinen für jedes Rückstandsglied \mathfrak{D}_n verschieden.

Hieraus folgt, daß an Stelle der Ausdrücke (10), (11), (13) und (14) die folgenden treten. Der *allgemeine Ausdruck* für die Verschiebung wird

$$(16) \quad \mathfrak{D} = \frac{\varepsilon \mathfrak{E}}{4 \pi \sigma^2} + \int_{-\infty}^t d\tau \frac{\varepsilon \mathfrak{E}}{4 \pi \sigma^2} \frac{d\psi(t-\tau)}{d\tau}.$$

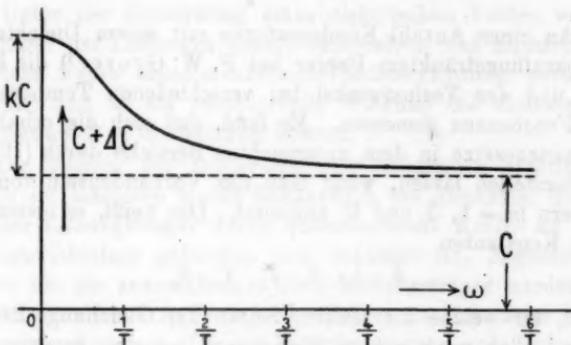


Fig. 3.

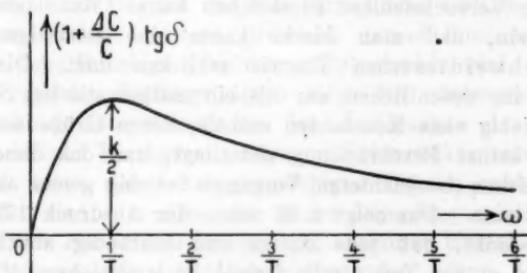


Fig. 4.

Im *konstanten Felde* wird

$$(17) \quad \mathfrak{D} = \frac{\varepsilon \mathfrak{E}}{4 \pi \sigma^2} (1 + \psi(0) - \psi(t)).$$

Darin bedeutet $\psi(t)$ nur eine Abkürzung für den Ausdruck

$$(18) \quad \psi(t) = \sum_n k_n e^{-\frac{t}{T_n}}.$$

Für die verhältnismäßige Zunahme der Kapazität bei Wechselstrom findet man die Beziehung

$$(19) \quad \frac{\Delta C}{C} = \sum_n \frac{k_n}{1 + \omega^2 T_n^2}$$

und für den Verlustwinkel

$$(20) \quad \left(1 + \frac{\Delta C}{C}\right) \operatorname{tg} \delta = \sum_n \frac{k_n \omega T_n}{1 + \omega^2 T_n^2}.$$

An einer Anzahl Kondensatoren mit einem Dielektrikum aus paraffingetränktem Papier hat F. W. Grover¹⁾ die Kapazität und den Verlustwinkel bei verschiedenen Temperaturen und Frequenzen gemessen. Er fand, daß sich die erhaltenen Frequenzgesetze in dem untersuchten Bereiche durch (19) und (20) darstellen lassen, wenn man das Vorhandensein von drei Gliedern ($n = 1, 2$ und 3) annimmt. Das heißt, es lassen sich sechs Konstanten

$$k_1, k_2, k_3, T_1, T_2, T_3$$

finden, für welche die rechten Seiten der Gleichung (19) und (20) bei allen untersuchten Frequenzen von den experimentell gefundenen linken Seiten nur um geringe Beträge abweichen, die man Versuchsfehlern zuschreiben kann. Man sieht indes leicht ein, daß man hierin kaum eine Bestätigung der von Schweidlerschen Theorie erblicken darf. Diese erscheint im wesentlichen nur als ein mathematisches Schema, das beliebig viele Konstanten enthält, deren Größe und Verteilung keiner Beschränkung unterliegt, und das daher dem tatsächlichen (beobachteten) Vorgange beliebig genau angepaßt werden kann. Das zeigt z. B. schon der Ausdruck (17), wenn man bedenkt, daß jede stetige und beständig abnehmende Funktion ψ der Zeit t rein formal nach Gleichung (18) entwickelt werden kann.

v. Schweidler gibt seinem grundlegenden Ansatz (15) eine molekulartheoretische Deutung, die wir beibehalten wollen, weil sie uns gestattet, eine bequeme und anschauliche Vorstellung mit den hier gebrauchten Begriffen zu verbinden.

1) F. W. Grover, Bull. of the Bur. of Stand. Washington 7. p. 495. 1911.

Man denkt sich bekanntlich das neutrale Molekül zusammengesetzt aus positiv und negativ geladenen Bestandteilen, die durch irgendwelche Kräfte in ihrer Gleichgewichtslage gehalten werden. Das Molekül bildet so eine Art von elektrischem Dipol, der den Elementarmagneten in der Theorie des Magnetismus entspricht. In der dem Felde Null entsprechenden Gleichgewichtslage sind die molekularen Dipole regellos verteilt, so daß das mittlere elektrische Moment überall Null ist. Unter der Einwirkung eines elektrischen Feldes werden die Träger der Ladungen derart verschoben, daß nunmehr die mit dem Felde zusammenfallende Achsenrichtung bevorzugt erscheint und so als resultierende Wirkung die dielektrische Polarisation $\mathfrak{D} - \mathfrak{E}$ zustande kommt.

Die Theorie der Dispersion und Absorption elektrischer Wellen in Isolatoren macht bekanntlich die Annahme, daß ein Teil der Ladungsträger durch quasielastische Kräfte an seine Gleichgewichtslage gebunden und befähigt ist, Eigenschwingungen um sie auszuführen. Diese Ladungsträger werden daher bei plötzlicher Änderung des Feldes in ihre neue Ruhelage *hineinschwingen*. Da die Eigenfrequenzen außerordentlich hoch sind und die Schwingungen wegen der Dämpfung rasch absterben, wird dies bei den hier betrachteten verhältnismäßig langsamen Feldänderungen praktisch darauf hinauskommen, daß die neue Ruhelage scheinbar sofort erreicht wird. Diesen leichtbeweglichen Ladungsträgern möge der *Anfangswert* der Verschiebung entsprechen, der den Änderungen des Feldes ohne merkliche Verzögerung folgt. v. Schewidler nimmt nun an, daß neben den schwingungsfähigen Dipolen auch solche vorhanden sind, die eine sehr starke Dämpfung erleiden, so daß sie nur *aperiodische* Bewegungen ausführen können. Unter dem Einflusse eines plötzlich auftretenden, dann konstant bleibenden elektrischen Feldes stellt sich dann bei ihnen der neue Gleichgewichtszustand derart her, daß die Abweichung von ihm nach einer Exponentialfunktion

$$e^{-\frac{t}{T}}$$

abnimmt. Nach der Pellatschen Theorie (§ 4) wäre die Zeitkonstante T für alle derartigen Dipole dieselbe; die Konstante k

wäre das Verhältnis der Anzahl der aperiodisch gedämpften Dipole zur Anzahl der oszillatorisch beweglichen. Die Erweiterung dieser Theorie durch v. Schweidler kommt also auf die Annahme hinaus, daß nicht nur *eine* Gattung solcher aperiodisch gedämpften Dipole mit einer bestimmten Zeitkonstante T vorhanden sei, sondern eine endliche oder unendliche Anzahl verschiedener Gattungen mit verschiedenen Zeitkonstanten T_n ; die Zahl der Dipole jeder Gattung in der Raumeinheit ist proportional k_n . Die zunächst rein mathematische Zerlegung (15) entspricht hiernach einer Zerlegung der Gesamtwirkung in die von den einzelnen Dipolgattungen herrührenden Anteile.

Integriert man auf der rechten Seite von Gleichung (16) partiell, so erhält man mit Rücksicht auf Gleichung (5) den Ausdruck

$$(21) \quad \mathfrak{D}' = - \frac{\varepsilon}{4\pi c^2} \int_{\tau = -\infty}^{\tau = t} \psi(t - \tau) d\mathfrak{E}.$$

Von diesem Ausdruck ist Hopkinson¹⁾ ausgegangen, indem er der Feldstärkenänderung $d\mathfrak{E}$ im Zeitpunkte τ eine Ausgleichsverschiebung $d\mathfrak{D}'$ zuschreibt, die für irgend eine spätere Zeit t noch den Betrag

$$d\mathfrak{D}' = - \frac{\varepsilon}{4\pi c^2} \psi(t - \tau) d\mathfrak{E}$$

besitzt. *Die Teilbeträge $d\mathfrak{D}'$, die von allen vorhergehenden Feldstärkenänderungen $d\mathfrak{E}$ herrühren, sollen sich einfach superponieren.* So erhält man den allgemeinen Ausdruck (21).

§ 4. Einführung eines Verteilungsgesetzes für die Zeitkonstanten T_n .

Die Theorie von Hopkinson macht über die Form der Funktion $\psi(t)$ keine Aussage. Die Theorie v. Schweidlers liefert zwar den Ansatz (18), läßt jedoch sowohl die Zahl n der Exponentialglieder als auch die Amplituden k_n und die Zeitkonstanten T_n dieser Glieder vollkommen unbestimmt. Versucht man, die Funktion aus den Meßergebnissen abzuleiten,

1) J. Hopkinson, l. c.

so ergibt sich stets, daß man eine größere Zahl von Gliedern mit weit auseinander liegenden Werten der Zeitkonstante annehmen muß, um die Ergebnisse eines auch nur einigermaßen ausgedehnten Meßbereiches darstellen zu können. Im Sinne des v. Schweidlerschen hypothetischen Bildes liegt die Annahme nahe, daß in der Funktion $\psi(t)$ alle Werte der Zeitkonstante von 0 bis ∞ vorkommen, daß man also an Stelle der Summe das Integral schreiben kann:

$$(18a) \quad \psi(t) = \int_0^{\infty} k(T) dT e^{-\frac{t}{T}}.$$

$k(T) dT$ ist hiernach die Amplitudensumme aller Glieder, deren Zeitkonstanten zwischen T und $T + dT$ liegen. $k(T)$ ist, wie schon die Schreibweise andeutet, als Funktion des jeweiligen Wertes T der Zeitkonstante aufzufassen; man kann sie die *Verteilungsfunktion* der Zeitkonstanten nennen.

Wir wollen nun für dieses Verteilungsgesetz den Ausdruck

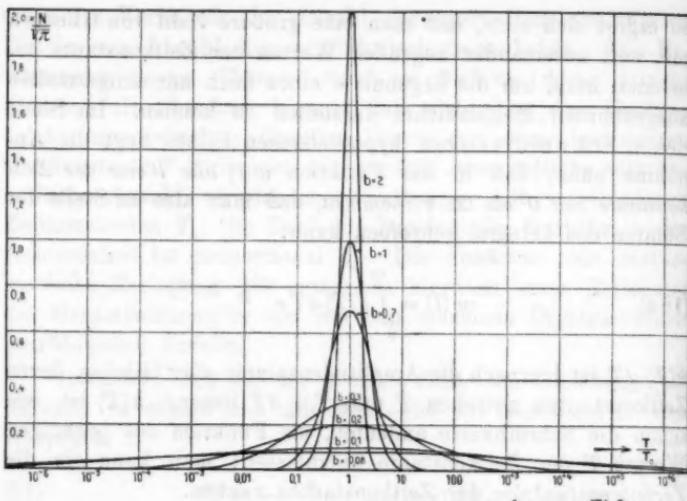
$$(22) \quad k(T) dT = \frac{k b}{V\pi} e^{-b^2 z^2} dz$$

annehmen¹⁾, mit

$$(23) \quad z = \log \operatorname{nat} \frac{T}{T_0}.$$

Das heißt, die Logarithmen der Zeitkonstanten gruppieren sich um einen wahrscheinlichsten Wert $\log \operatorname{nat} T_0$; und zwar tun sie dies um so dichter, je größer die Konstante b ist, wie Fig. 5 zeigt.

1) Analog der Wiechertschen Behandlung der *elastischen* Nachwirkung. Der Ausdruck läßt sich, wenn man in dem v. Schweidlerschen molekularetheoretischen Bilde bleibt, dadurch dem Verständnis näher bringen, daß man die Abweichungen der Zeitkonstanten von einem mittleren Werte störenden Einflüssen zuschreibt, die z. B. in der Gruppierung der Dipole liegen können. Gemäß dem verwickelten Bau der molekularen Welt wird man den gleichzeitigen Einfluß sehr vieler Störungsquellen annehmen müssen. Nimmt man die Annahme hinszu, daß jede dieser Ursachen die Zeitkonstante eines Dipols in einem von den übrigen Störungsursachen *unabhängigen Verhältnisse* (nicht Betrage!) vergrößern oder verkleinern kann, so folgt nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung der Ausdruck (22).



$$\text{Verteilungsgesetz der Zeitkonstanten } \frac{b N}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(b \log \frac{T}{T_0}\right)^2}$$

für verschiedene Werte von b .

Fig. 5.

§ 5. Das Dielektrikum im konstanten elektrischen Felde.

Durch Einführung der Verteilungsfunktion (22) in den Ausdruck (18a) erhält man

$$(24) \quad \psi(t) = \frac{k b}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b^2 z^2 - \frac{t}{T_0} e^{-z}} dz.$$

Diese Funktion bestimmt nach (17) den Verlauf der Verschiebung im konstanten Felde. Für $\psi(0)$ folgt aus (24) der Wert $\psi(0) = k$, in Übereinstimmung mit der in Gleichung (4) eingeführten Bezeichnung für den Anfangswert der Nachwirkung.

Bei den Versuchen wird nicht die Verschiebung selbst, sondern der *Verschiebungsstrom* gemessen. Im konstanten elektrischen Felde ist er mit dem Nachwirkungs- oder Rückstandstrom identisch. Seine Stromdichte ist

$$(25) \quad i = \frac{d \mathfrak{D}}{dt} = - \frac{e \mathfrak{E}_0}{4 \pi c^2} \frac{d \psi}{dt}.$$

Daraus folgt die Stromstärke für einen Kondensator mit der geometrischen Kapazität C , der an die Spannung V_0 gelegt wird, zu

$$(26) \quad I = -C V_0 \frac{d\psi}{dt},$$

worin nach Gleichung (24)

$$(27) \quad -\frac{d\psi}{dt} = \frac{k b}{T_0 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b^2 z^2 - z - \frac{t}{T_0} e^{-z}} dz$$

zu setzen ist. Dieses Integral lässt sich im allgemeinen nicht in geschlossener Form ausdrücken; man kann es aber leicht, z. B. nach der Simpsonschen Regel, für bestimmte Werte von b und t/T_0 ausrechnen.¹⁾

Fig. 6 zeigt den Verlauf der Größe IT_0/CV_0 für die Werte $b = \infty, 1, 0,43, 0,261$ und $0,1$ (ausgezogene Kurven). Weil bei kleinem b der Rückstandsstrom mit sehr großen Werten beginnt, aber später sehr langsam abnimmt, erschien es zweckmäßig, Abszisse und Ordinate in Fig. 6 mit logarithmischer Teilung zu versehen.

Das hervorstechendste Kennzeichen des Verlaufs der Nachwirkung bei kleinem b (d. h. bei weitgehender Zerstreuung der Zeitkonstanten) ist der erst sehr schnelle, später äußerst lange Abfall der Verschiebung. Wenn also bei manchen Stoffen oft nach Wochen und Monaten, manchmal selbst nach Jahren noch eine merkliche (meßbare) dielektrische Nachwirkung beobachtet wird, so hat man es nach unserer Anschauung bei ihnen mit kleinen Werten von b zu tun.

Für diese kleinen Werte b lassen sich bequeme Näherungswerte für den Ausdruck (27) angeben.²⁾

1. Es ist

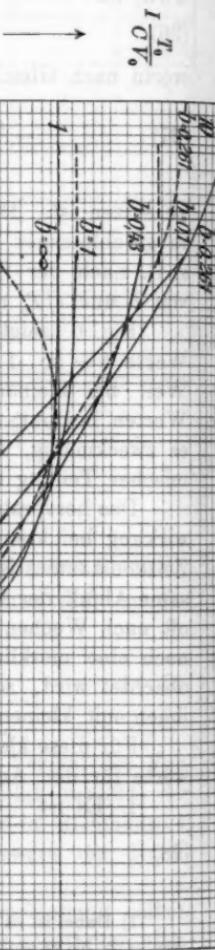
$$(28) \quad -\frac{d\psi}{dt} \approx \frac{k b}{T_0 \sqrt{\pi}} \cdot \frac{T_0}{t} e^{-\left(b \log \frac{t}{T_0}\right)^2}.$$

1) Dabei ist es zweckmäßig, die Integration zunächst in zwei Schritte, von $-\infty$ bis 0 und von 0 bis ∞ zu zerlegen, dann im ersten Integral $-z$ für z zu schreiben und hierauf die beiden Integrale wieder zusammen zu fassen.

2) Sie können z. B. aus Näherungsformeln leicht entwickelt werden, die Wiechert für die Funktion ψ angegeben hat; Wied. Ann. 50. p. 549. 1893.

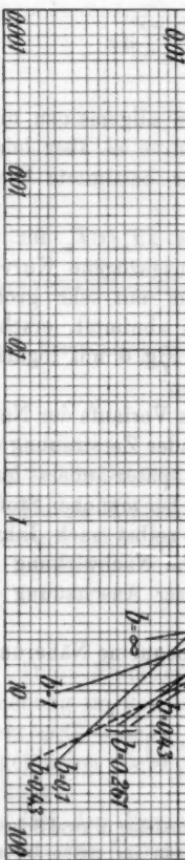
Daraus folgt

$$(29) \quad \log I = \text{Const} - \log \frac{t}{T_0} - \frac{b^2}{\log e} \left(\log \frac{t}{T_0} \right)^2.$$



Zzeitlicher Verlauf des Rückstandstromes bei verschiedener Konzentration der Zeitkonstanten um ihren wahrscheinlichsten Wert T_0 .

Fig. 6.



In dem Koordinatensystem mit logarithmischer Teilung (Fig. 6) würde sich diese Beziehung durch eine Parabel darstellen, die in dem Punkte $t = T_0$ eine Tangente mit -45°

Neigung besitzt. Für größere Werte von b ist der Ausdruck (28) bzw. (29) nicht zu gebrauchen. In Fig. 6 ist z. B. die hiernach berechnete Parabel für $b = 0,43$ und für $b = 0,261$ punktiert eingetragen; sie bildet für diese Werte, wie man sieht, nur eine ziemlich rohe Annäherung an den wahren Verlauf des Stromes. Dagegen ist für $b = 0,1$ die Parabel in dem Maßstabe und in dem Bereich der Fig. 6 von der exakten (gezeichneten) Kurve nicht mehr zu unterscheiden.

2. Innerhalb eines begrenzten Zeitraumes kann $-d\psi/dt$ und damit auch I durch den Ausdruck

(30) $I \approx Bt^{-n}$ ersetzt werden, wo B und n Konstanten sind.¹⁾ Dies ist nun genau der Ausdruck, der von mehreren Autoren übereinstimmend für den Verlauf des Nachwirkungsstromes experimentell gefunden worden ist.²⁾ Er stellt sich in unserer Theorie als ein in einem begrenzten Zeitgebiete gültiger Näherungsausdruck der strengen Formel (27) dar. Er ersetzt sie in einem solchen Bereich des logarithmisch eingeteilten Koordinatensystems (Fig. 6), in welchem man den Stromverlauf durch eine Gerade darstellen kann; wie sich durch Logarithmieren von (30) sofort ergibt.

Infolge unseres Nachweises der beschränkten Gültigkeit von (30) fallen nun auch die Schwierigkeiten weg, die sich bei den auf diesen Ausdruck gegründeten Betrachtungen v. Schweidlers ergeben hatten; nämlich, daß nach (30) I für $t = 0$ unendlich groß wird; ferner, daß die nach (30) berechnete gesamte Rückstandsladung

$$\int_0^{\infty} Idt$$

ebenfalls unendlich wird. Aus dem streng gültigen Ausdruck (26) und (27) folgt dagegen³⁾

1) Soll die Gleichung (30) den Stromverlauf in der Umgebung des Zeitpunktes $t = \tau$ darstellen, so wird

$$n = 1 + 2b^2 \log \frac{\tau}{T_0}.$$

2) Vgl. v. Schweidler, a. a. O.

3) Unter Benutzung der Formel

$$\int_0^{\infty} du e^{-b^2 u^2} \operatorname{Cof} 2qu = \frac{\sqrt{\pi}}{2b} e^{\frac{q^2}{b^2}}$$

$$(31) \quad I(0) = C V_0 \frac{k}{T_0} e^{\frac{1}{4b^2}}$$

und

$$(32) \quad \int_0^\infty I dt = C V_0 \psi(0) = C V_0 k,$$

also *endliche Werte für beide Größen*. Der Anfangstrom $I(0)$ bestimmt in Fig. 6 die Asymptote der zugehörigen Stromkurve; diese Asymptoten sind, soweit sie in den Bereich der Abbildung fallen, punktiert eingetragen.

Für kleine b erscheint die Stromkurve in dem logarithmisch eingeteilten Koordinatennetz sehr wenig gekrümmt; dann kann also der Gültigkeitsbereich des Ausdrucks (30) einen sehr beträchtlichen Umfang annehmen und so eine allgemeine Gültigkeit dieser Beziehung vortäuschen.

§ 6. Das Dielektrikum im elektrischen Wechselfelde.

Um die Abhängigkeit der Kapazität von der Frequenz zu ermitteln, greifen wir auf die Formel (19) zurück. Wir haben darin für k den Ausdruck (22) einzusetzen und die Summation als Integration auszuführen; so ergibt sich

$$\frac{dC}{C} = \frac{k b}{V \pi} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} e^{-\left(b \log \operatorname{nat} \frac{T}{T_0}\right)^2}.$$

Hierin substituiere man

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} z = \log \operatorname{nat} \frac{T}{T_0}, \\ z_0 = \log \operatorname{nat} \omega T_0, \\ z + z_0 = u. \end{array} \right.$$

Danach zerlege man die Integration, die von $u = -\infty$ bis $+\infty$ auszuführen ist, in zwei Schritte, schreibe in dem

die ähnlich zu beweisen ist, wie die entsprechende Formel mit $\cos 2q u$ bei Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen, Bd. I. § 61. Braunschweig 1900.

ersten Integral für u den Buchstaben $-u$ und vereinige hierauf die beiden Integrale wieder. Man erhält

$$(34) \quad \frac{\Delta C}{C} = \frac{k b}{\sqrt{\pi}} e^{-b^2 z_0^2} \int_0^{\infty} du e^{-b^2 u^2} \frac{\text{Cof} (2b^2 z_0 - 1) u}{\text{Cof} u}.$$

Auf demselben Wege ergibt sich aus Gleichung (20) die folgende Formel für den Verlustwinkel:

$$(35) \quad \left(1 + \frac{\Delta C}{C}\right) \operatorname{tg} \delta = \frac{k b}{\sqrt{\pi}} e^{-b^2 z_0^2} \int_0^{\infty} du e^{-b^2 u^2} \frac{\text{Cof} 2b^2 z_0 u}{\text{Cof} u}.$$

Die Integrale (34) und (35) lassen sich im allgemeinen nicht in geschlossener Form darstellen und sind daher nach irgend einem Näherungsverfahren (z. B. nach der Simpliconschen Regel) numerisch auszuwerten. Ist jedoch gerade $2b^2 z_0 - 1$ (bzw. $2b^2 z_0$) eine ungerade ganze Zahl $= \pm (2n + 1)$, so geht die Division unter dem Integralzeichen in (34) (bzw. (35)) auf¹⁾, und dann zerfällt das Integral in $(n+1)$ Integrale, von denen jedes ausgerechnet werden kann.²⁾ Man erhält so die in den folgenden Tabellen I und II angegebenen Werte.¹⁾

Solange b nicht kleiner als 1 wird, genügen die auf diesem Wege bestimmten Werte zur praktischen Festlegung des Frequenzgesetzes der Kapazität und des Verlustwinkels; die durch die Werte von z_0 gegebenen Frequenzen ω (nach Gleichung (33)) bilden dann nämlich eine genügend dichte Folge, um die Werte $\Delta C/C$ und $\operatorname{tg} \delta$ für dazwischen liegende Frequenzen durch Interpolieren bestimmen zu können. Für kleine b geht das jedoch nicht mehr an; man muß dann die Integrale in (34) und (35) numerisch auswerten.³⁾

1) Es ist

$$\frac{\text{Cof} (2n+1) u}{\text{Cof} u} = \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^{n-\lambda} \text{Cof} 2\lambda u.$$

2) Nach der in der Fußnote 3 auf p. 835 angegebenen Formel.

3) Für genügend kleine b (etwa von $b = 0,1$ hinunter) läßt sich (34) durch den bequemen Näherungswert

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{k}{2} [1 - \Phi(b z_0)]$$

Tabelle I.

z_0	$\frac{1}{k} \frac{dC}{C} =$
$-\infty$	1
$-\frac{4}{b^2}$	$1 - e^{-\frac{7}{b^2}} + e^{-\frac{12}{b^2}} - e^{-\frac{15}{b^2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{16}{b^2}}$
$-\frac{3}{b^2}$	$1 - e^{-\frac{5}{b^2}} + e^{-\frac{8}{b^2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{9}{b^2}}$
$-\frac{2}{b^2}$	$1 - e^{-\frac{3}{b^2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{4}{b^2}}$
$-\frac{1}{b^2}$	$1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{b^2}}$
0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{b^2}$	$\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{b^2}}$
$\frac{2}{b^2}$	$e^{-\frac{3}{b^2}} \left(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{b^2}}\right)$
$\frac{3}{b^2}$	$e^{-\frac{5}{b^2}} \left(1 - e^{-\frac{3}{b^2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{4}{b^2}}\right)$
$\frac{4}{b^2}$	$e^{-\frac{7}{b^2}} \left(1 - e^{-\frac{5}{b^2}} + e^{-\frac{8}{b^2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{9}{b^2}}\right)$
$\frac{5}{b^2}$	$e^{-\frac{9}{b^2}} \left(1 - e^{-\frac{7}{b^2}} + e^{-\frac{12}{b^2}} - e^{-\frac{15}{b^2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{16}{b^2}}\right)$
$\frac{n}{b^2}$	$e^{-\frac{2n-1}{b^2}} \left(1 - e^{-\frac{2n-3}{b^2}} + \dots\right)$

Tabelle II.

$\pm z_0$	$\frac{1}{k} \left(1 + \frac{dC}{C}\right) \operatorname{tg} \delta =$
$\frac{1}{2b^2}$	$\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4b^2}}$
$\frac{3}{2b^2}$	$e^{-\frac{5}{4b^2}} \left(1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{b^2}}\right)$
$\frac{5}{2b^2}$	$e^{-\frac{9}{4b^2}} \left(1 - e^{-\frac{3}{b^2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{4}{b^2}}\right)$
$\frac{7}{2b^2}$	$e^{-\frac{13}{4b^2}} \left(1 - e^{-\frac{5}{b^2}} + e^{-\frac{8}{b^2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{9}{b^2}}\right)$
$\frac{2n+1}{2b^2}$	$e^{-\frac{4n+1}{4b^2}} \left(1 - e^{-\frac{2n-1}{b^2}} + \dots\right)$

Die Fig. 7 zeigt den Verlauf der Kapazitätsänderung $\Delta C/C$, Fig. 8 den Verlauf der Größe

$$\left(1 + \frac{\Delta C}{C}\right) \operatorname{tg} \delta$$

für verschiedene Werte von b . Als Abszisse ist nicht die Frequenz selbst, sondern die ihr proportionale Größe ωT_0 aufgetragen, wodurch erreicht wird, daß dieselbe Kurvenschar für beliebige Werte der wahrscheinlichsten Zeitkonstante T_0 benutzbar ist.

Es ergeben sich die folgenden Eigentümlichkeiten hinsichtlich des Verlaufes der Größen $\Delta C/C$ und $\operatorname{tg} \delta$.

1. Was zunächst die von der Nachwirkung herrührende Kapazitätsvergrößerung ΔC angeht, so nimmt sie mit wachsender Frequenz beständig ab. Ferner ist

$$\text{für } \omega = 0 \quad \frac{\Delta C}{C} = k;$$

$$\text{für } \omega = \frac{1}{T_0} \quad \frac{\Delta C}{C} = \frac{1}{2} k.$$

Diese Beziehungen gelten für beliebige Werte der Konstanten b .

Wenn b kleiner und kleiner wird, schmiegt sich die Kurve für $\Delta C/C$ mehr und mehr dem konstanten Werte $\frac{1}{2} k$ an, und zwar geschieht das in der Weise, daß die Kurve zuerst sehr rasch auf nahezu den Wert $\frac{1}{2} k$, dann äußerst langsam weiter fällt.

ersetzen, worin Φ das Gaußsche Fehlerintegral

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$$

bedeutet. Eine Zahlentafel für dieses Integral findet sich z. B. in den „Funktionentafeln“ von Jahnke u. Emde, p. 33. Leipzig 1909.

Der vorstehende Näherungsausdruck ergibt sich aus (34) nach leichter Umformung mit Rücksicht auf den Umstand, daß für kleine b der Ausdruck

$$\frac{\operatorname{Co}f(2b^2 x_0 - 1)u}{\operatorname{Co}f u}$$

durch $e^{-2b^2 x_0 u}$ ersetzt werden darf.

2. Die Größe

$$\left(1 + \frac{4C}{C}\right) \operatorname{tg} \delta$$

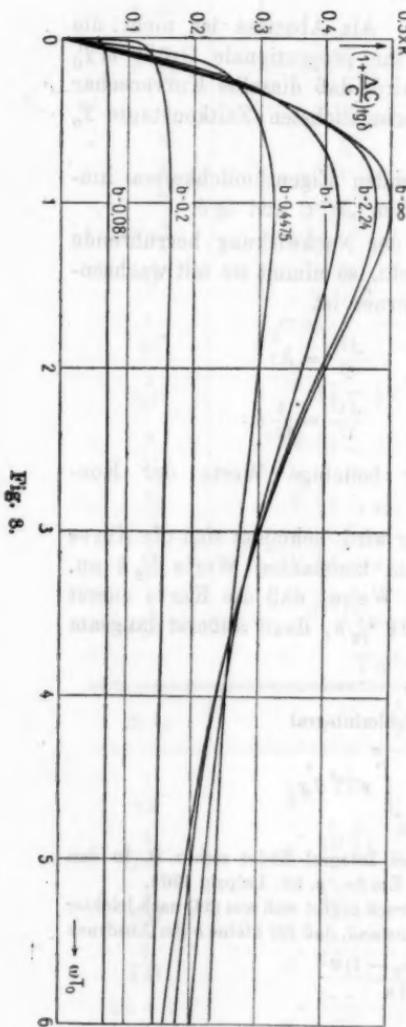


Fig. 8.

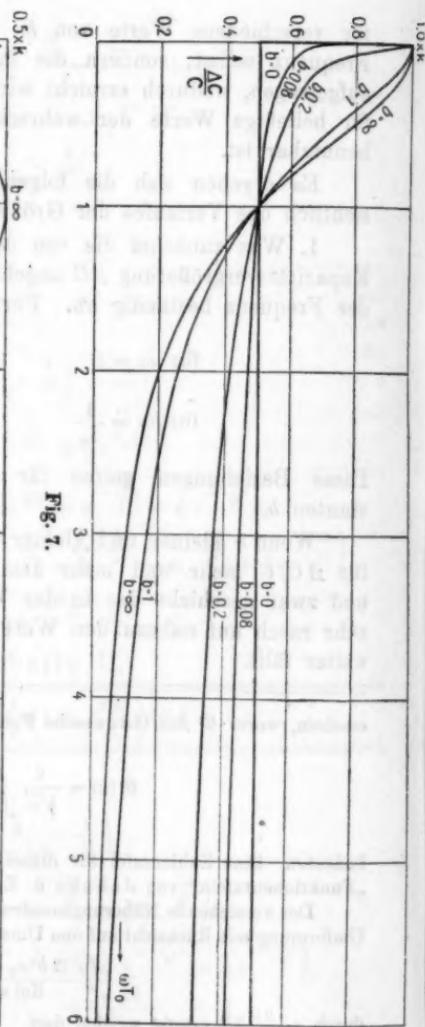


Fig. 7.

(deren Verlauf bei kleinen Werten von b oder kleinen Werten von k mit dem Verlauf von $\operatorname{tg} \delta$ selbst im wesentlichen übereinstimmt) beginnt mit dem Werte 0 bei $\omega = 0$, erreicht bei

$$\omega = \frac{1}{T_0}$$

ihr Maximum, nimmt dann mit wachsender Frequenz beständig ab und nähert sich dem Grenzwert Null.

Für kleine Werte von b erweist sich der Verlustwinkel ebenso wie die Kapazität in einem weiten Frequenzbereiche als praktisch konstant. Aus Gleichung (35) ergibt sich leicht

$$(36) \quad \lim_{b=0} \left(1 + \frac{\Delta C}{C} \right) \operatorname{tg} \delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} k b = 0,886 k b.$$

An Fernsprechkondensatoren aus paraffingetränktem Papier hat Jordan¹⁾ einen in einem ausgedehnten Frequenzbereiche nahezu konstanten Verlustwinkel festgestellt. Wir haben daher nach dem Vorhergehenden diesen Kondensatoren ein kleines b zuzuschreiben. Daraus ist nun nach § 5 weiter zu schließen, daß der Rückstandsstrom im konstanten Felde in einem weiten Bereich das Gesetz (30) befolgen muß, und daß hierin n nicht beträchtlich von 1 abweicht. Das deckt sich in der Tat mit den Versuchsergebnissen Jordans bei Gleichstrom. Das Verhalten dieser Kondensatoren ordnet sich also vollständig der hier gegebenen Theorie unter.

Wegen des sehr langgestreckten Verlaufes der Kurven in Figg. 7 u. 8 für kleine b sind Näherungsformeln wichtig, nach denen sich $\Delta C/C$ und $\operatorname{tg} \delta$ für hohe Frequenzen, d. h. große Werte von ωT_0 bequem berechnen lassen. Diese Formeln erhält man leicht aus den in den Tabellen I und II angegebenen allgemeinen Ausdrücken dadurch, daß man das Argument

$$z_0 = \frac{n}{b^2}, \quad \text{bzw. } z_0 = \frac{2n+1}{2b^2}$$

groß wählt; es ergibt sich

$$(37) \quad \frac{\Delta C}{C} = k e^{-2z_0 + \frac{1}{b^2}} = \frac{k e^{\frac{1}{b^2}}}{\omega^2 T_0^2},$$

$$(38) \quad \left(1 + \frac{\Delta C}{C} \right) \operatorname{tg} \delta = k e^{-z_0 + \frac{1}{4b^2}} = \frac{k e^{\frac{1}{4b^2}}}{\omega T_0}.$$

1) Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 14. p. 451. 1912.

Für $b = \infty$ gehen die allgemeinen Ausdrücke (34) und (35) natürlich wieder in die einfachen Formeln (13) und (14) über.

Vergleicht man die theoretisch ermittelten Kurven Figg. 7 und 8 mit den bisher bekannt gewordenen Versuchsergebnissen, so läßt sich allgemein sagen, daß diese Ergebnisse entweder unmittelbar den theoretischen Kurven folgen, oder sich aus ihnen nach den noch zu entwickelnden Grundsätzen (§ 8) zusammensetzen lassen.¹⁾

§ 7. Der Einfluß der Temperatur.

Die dielektrische Nachwirkung wird, wie alle Nachwirkungsvorgänge, von der Temperatur stark beeinflußt. In der hier entwickelten Auffassung der dielektrischen Nachwirkungsvorgänge läßt sich der Einfluß der Temperatur, soweit Versuche darüber bisher vorliegen, durch die Aussage wiedergeben, daß die wahrscheinlichste Zeitkonstante T_0 mit steigender Temperatur Θ stark abnimmt.²⁾ Dagegen ändert sich b (d. h. die Verteilung der T um ihren wahrscheinlichsten Wert T_0) nur wenig; wenn überhaupt, dann so, daß b mit steigender Temperatur zunimmt.

Bleibt b unverändert, so kann man auch sagen, daß der Nachwirkungsvorgang bei allen Temperaturen dasselbe Zeitgesetz befolgt, sofern für jede Temperatur eine der wahrscheinlichsten Zeitkonstanten T_0 proportionale Zeiteinheit gewählt wird. („Temperaturgesetz der korrespondierenden Zustände“.) Setzen wir dieses einfache Gesetz zunächst voraus und bezeichnen mit ψ_1 die Nachwirkungsfunktion bei der Temperatur Θ_1 , mit ψ_2 dieselbe Funktion bei der (höheren) Temperatur Θ_2 , so kann man schreiben

$$\psi_1 = \psi(t); \quad \psi_2 = \psi(\alpha t),$$

1) Da meine Versuchsserien noch nicht abgeschlossen sind, verweise ich hier zunächst auf die Untersuchungen von F. W. Grover, Bull. of the Bur. of Stand., 7. p. 495. Washington 1911.

2) Nach den in der Fußnote auf p. 881 skizzierten Vorstellungen und mit Rücksicht auf die bei höherer Temperatur häufigere Umgruppierung der Moleküle läßt sich ein derartiges Verhalten der Zeitkonstanten erwarten.

wobei $\alpha > 1$ ist. Hiermit ergibt sich der *Nachwirkungsstrom im konstanten Felde*:

bei der Temperatur Θ_1 zu $I_1 = -C V_0 \frac{d\psi_1}{dt} = -C V_0 \psi'(t)$,

bei der Temperatur Θ_2 zu $I_2 = -C V_0 \frac{d\psi_2}{dt} = -C V_0 \alpha \psi'(\alpha t)$.

Daraus folgt

$$(39) \quad (\log I_2)_t = (\log I_1)_t + \log \alpha.$$

Diese Gleichung liefert die folgende Vorschrift zur Konstruktion der Kurven von $\log I_2$, wenn der Verlauf des $\log I_1$ als Funktion von $\log t$ gegeben ist (Fig. 9): *Man verschiebe die Kurve $\log I_1$ parallel zur Geraden $\log I = -\log t$ im Sinne abnehmender t (Pfeilrichtung in Fig. 9) um das Stück $\sqrt{2} \log \alpha$.*

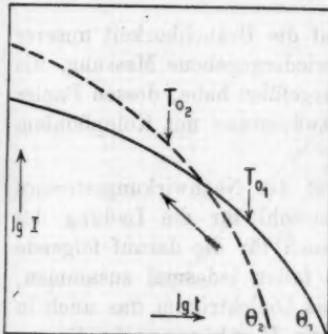


Fig. 9.

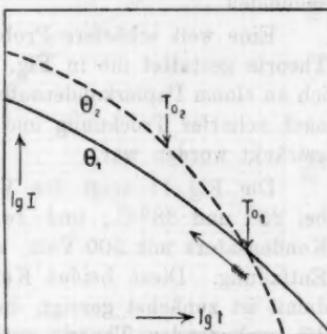


Fig. 10.

Zeitlicher Verlauf des Rückstandstromes bei zwei verschiedenen Temperaturen Θ_1 und $\Theta_2 > \Theta_1$.

Diese Konstruktion erleidet nur eine geringfügige Änderung für den Fall, daß die Konstante b , d. h. die Konzentration der Zeitkonstanten mit steigender Temperatur zunimmt. Man hat dann nur nach der wie vorher ausgeführten Verschiebung der Kurve diese durch die entsprechende Kurve mit dem größeren b (die also stärker gekrümmmt ist) zu ersetzen (Fig. 10).

Eine vollständige Versuchsreihe über den Einfluß der Temperatur auf den Nachwirkungsstrom im konstanten Felde

1) l. e. p. 759 Fig. 12.

hat bisher nur v. Schweidler ausgeführt.¹⁾ Er maß den Rückstandsstrom eines Glaskondensators bei verschiedenen Temperaturen zwischen 18° und 47° C. und fand dafür das Gesetz (30)

$$I = B t^{-n}$$

mit $n < 1$. Die I bilden daher in dem logarithmisch eingeteilten Koordinatennetz parallele Gerade, und zwar liegen diese Geraden in der Reihenfolge steigender Temperaturen übereinander. Das ist aber genau das, was wir nach Fig. 9 (oder 10) zu erwarten haben, wenn wir durch zwei Schnitte parallel zur Ordinatenachse merklich geradlinige Stücke der Kurven in dem Abszissenbereiche $t < T_0$ (weil $n < 1$) herauschneiden.

Eine weit schärfere Probe auf die Brauchbarkeit unserer Theorie gestattet die in Fig. 11 wiedergegebene Messung, die ich an einem Papierkondensator ausgeführt habe, dessen Papier nach scharfer Trocknung und Entwässerung mit Kolophonium getränkt worden war.

Die Fig. 11 zeigt den Verlauf des Nachwirkungsstromes bei 23° und 38° C., und zwar sowohl für die Ladung des Kondensators mit 500 Volt, als auch für die darauf folgende Entladung. Diese beiden Kurven fallen jedesmal zusammen; damit ist zunächst gezeigt, daß das Dielektrikum das auch in der vorliegenden Theorie enthaltene Hopkinson'sche Superpositionsgegesetz befolgt.¹⁾

Die *beobachteten* Werte sind für die Ladung durch *Kreise*, für die Entladung durch *Kreuze*, bzw. *Kreiskreuze* bezeichnet. Die *gezeichneten Linienzüge* sind die nach Gleichung (26), (27) berechneten Kurven, wobei für

$$38^\circ \text{ C. } b = 0,368; \quad T_0 = 100 \text{ Min.} = 6000 \text{ Sek.}; \quad k = 2,92;$$

$$23^\circ \text{ C. } b = 0,270; \quad T_0 = 3000 \text{ Min.} = 180000 \text{ Sek.}; \quad k = 3,42$$

eingesetzt worden ist.

1) Damit der Versuch gelingt, muß natürlich die Ladung so lange fortgesetzt werden, bis der Nachwirkungsstrom unmerklich klein geworden ist.

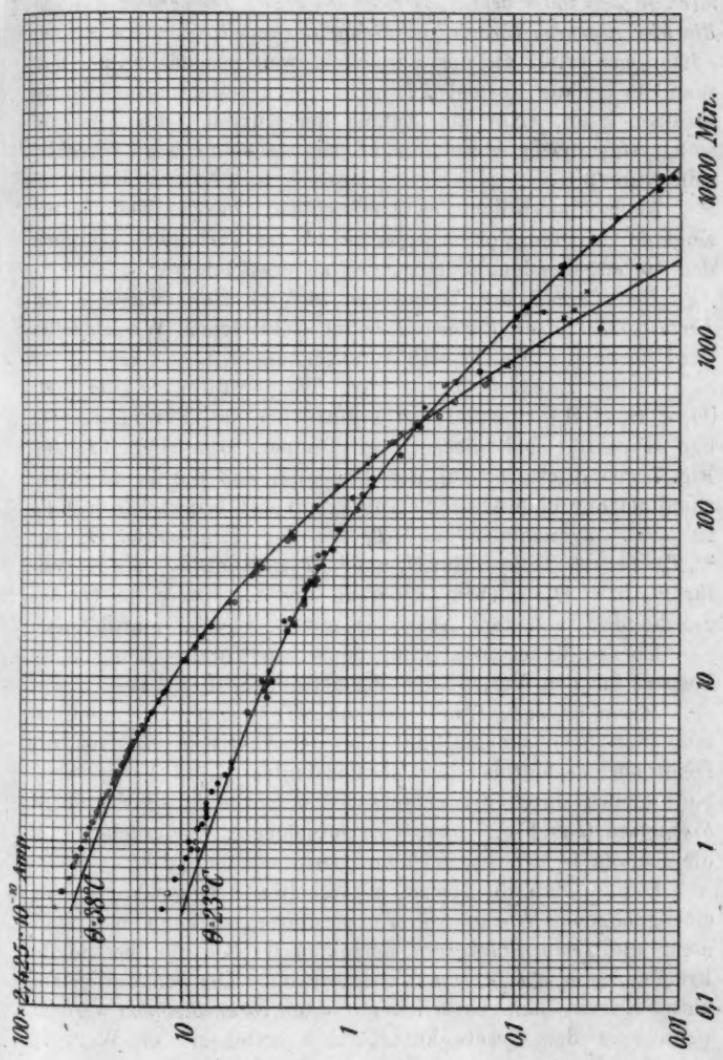


Fig. 11.

Das dielektrische Verhalten dieses Kondensators wird hier-nach in dem untersuchten Bereich bei beiden Temperaturen durch die hier gegebene Theorie vollständig dargestellt. Das ist um so bemerkenswerter, als der Bereich so weit ausgedehnt ist, daß man die genaue Formel (27) nicht durch Näherungsausdrücke ersetzen kann. Nur am Anfang der Kurven (t klein) zeigen sich systematische Abweichungen, von denen noch zu sprechen sein wird (§ 8).

Auch hinsichtlich der Abhängigkeit von der Temperatur zeigt der Kondensator im wesentlichen das Verhalten, das nach den vorhergehenden Erörterungen zu erwarten war.

Der Einfluß der Temperatur auf die Kapazität und den Verlustwinkel eines Kondensators im elektrischen Wechselfelde wird durch die Fig. 12—19 veranschaulicht.

Bleibt zunächst b bei den Temperaturen Θ_1 , Θ_2 , Θ_3 ($\Theta_1 < \Theta_2 < \Theta_3$) konstant, so ergibt sich das Frequenzgesetz der Kapazität bei diesen drei Temperaturen (Fig. 12) aus Fig. 7 mit Rücksicht auf den Umstand, daß die Temperaturzunahme nur eine Abnahme von T_0 mit sich bringt. In Fig. 12 ist z. B. angenommen, daß T_0 bei der Temperatur Θ_2 auf $\frac{2}{3} T_0$, bei der Temperatur Θ_3 auf $\frac{1}{2} T_0$ gefallen ist; die Kurven für Θ_2 bzw. Θ_3 ergeben sich dann aus der Kurve für Θ_1 dadurch, daß man ihre Abszissen mit $\frac{3}{2}$ bzw. 2 multipliziert.

Ebenso findet man unter denselben Voraussetzungen die Kurven für den Verlauf des Verlustwinkels (Fig. 14).

Wenn dagegen b mit steigender Temperatur zunimmt, so muß man nach der Multiplikation der Abszissen mit dem zugehörigen Verhältnis der Zeitkonstanten (T_{0_1}/T_{0_2}) die neue Kurve noch durch die entsprechende Kurve für das größere b ersetzen (aus Fig. 7 bzw. 8 zu entnehmen). So ergeben sich die Kurven in den Figg. 13 und 15.

Besitzt man die seben entwickelten Frequenzkurven für eine genügende Anzahl von Temperaturen, so kann man nunmehr die Temperaturkurven derselben Größen für bestimmte Frequenzen $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3, \dots$ entwickeln. Der genaue Verlauf dieser Kurven kann natürlich nur dann vorausbestimmt werden, wenn man das Gesetz kennt, nach welchem der Wert T_0 von der Temperatur Θ abhängt. Indessen gibt schon die Kenntnis der Tatsache, daß steigende Temperatur abnehmendes T_0

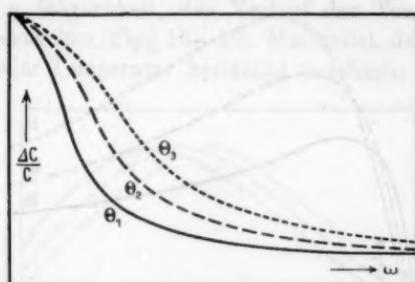


Fig. 12. Änderung der Kapazität mit der Frequenz bei verschiedenen Temperaturen, wenn b konstant ist.

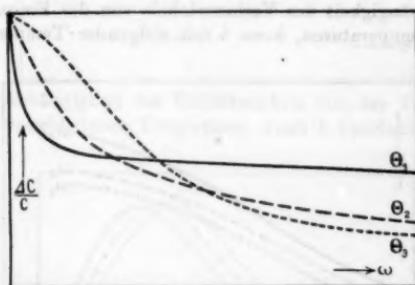


Fig. 13. Änderung der Kapazität mit der Frequenz bei verschiedenen Temperaturen, wenn b mit steigender Temperatur wächst.

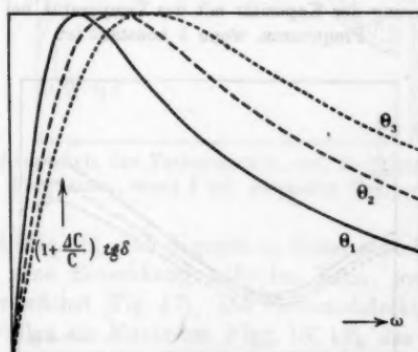


Fig. 14. Abhängigkeit des Verlustwinkels von der Frequenz bei verschiedenen Temperaturen, wenn b konstant ist.

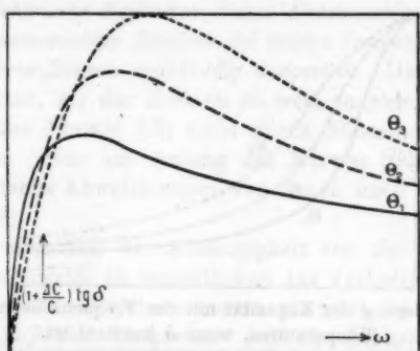


Fig. 15. Abhängigkeit des Verlustwinkels von der Frequenz bei verschiedenen Temperaturen, wenn b mit steigender Temperatur wächst.

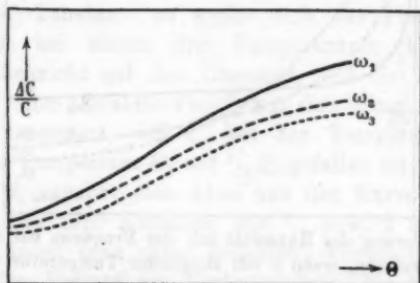


Fig. 16. Änderung der Kapazität mit der Temperatur bei verschiedenen Frequenzen, wenn b konstant ist.

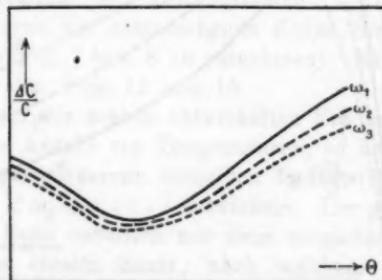


Fig. 17. Änderung der Kapazität mit der Temperatur bei verschiedenen Frequenzen, wenn b mit steigender Temperatur wächst.

bedeutet, die Möglichkeit, den Verlauf der Temperaturkurven ungefähr anzugeben (Figg. 16—19). Man findet, daß die Kapazität mit steigender Temperatur beständig zunehmen muß, sofern b

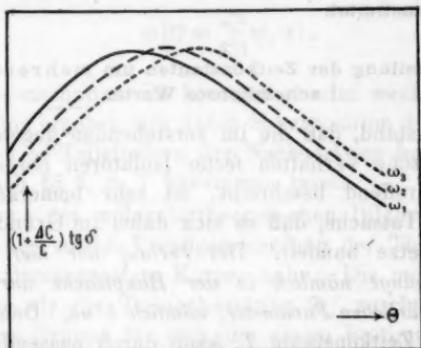


Fig. 18. Abhängigkeit des Verlustwinkels von der Temperatur bei verschiedenen Frequenzen, wenn b konstant ist.

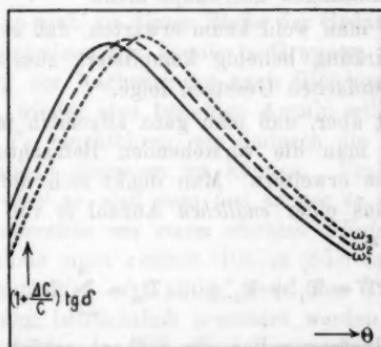


Fig. 19. Abhängigkeit des Verlustwinkels von der Temperatur bei verschiedenen Frequenzen, wenn b mit steigender Temperatur zunimmt.

konstant ist (Fig. 16), daß dagegen in dieser ansteigenden Kapazitätskurve eine Einsenkung auftreten kann, wenn b mit der Temperatur wächst (Fig. 17). Die Verlustwinkelkurven besitzen in beiden Fällen ein Maximum (Figg. 18, 19), das um so steiler wird, je stärker b mit der Temperatur zunimmt. Sehr bemerkenswert ist, daß die Verlustwinkelkurve für eine höhere Frequenz ω_3

stets gegenüber der für eine niedrigere Frequenz ω_1 gültigen Kurve im Sinne wachsender Temperaturen verschoben erscheint¹⁾, was mit allen bisher bekannt gewordenen Beobachtungsergebnissen übereinstimmt.

§ 8. Verteilung der Zeitkonstanten um mehrere wahrscheinlichste Werte.

Der Umstand, daß die im vorstehenden gegebene Theorie das dielektrische Verhalten fester Isolatoren bereits in vieler Hinsicht zutreffend beschreibt, ist sehr bemerkenswert angesichts der Tatsache, daß es sich dabei im Grunde um recht einfache Gesetze handelt. Der Verlauf der hier entwickelten Funktionen hängt nämlich in der Hauptsache nur von einem einzigen willkürlichen Parameter, nämlich b ab. Denn die wahrscheinlichste Zeitkonstante T_0 kann durch passende Wahl der Zeiteinheit aus den Funktionsausdrücken eliminiert werden, und die Konstante k beeinflußt als Proportionalitätsfaktor den Verlauf der Funktionen überhaupt nicht.

Nun kann man wohl kaum erwarten, daß auch die dielektrische Nachwirkung beliebig kompliziert zusammengesetzter Isolatoren so einfachen Gesetzen folge.

Es scheint aber, daß man ganz allgemein mit ihnen auskommt, wenn man die vorstehenden Betrachtungen in der folgenden Weise erweitert. Man denkt sich die dielektrische Nachwirkung aus einer endlichen Anzahl m von Teilbeträgen zusammengesetzt:

$$(40) \quad \mathfrak{D}' = \mathfrak{D}_1' + \mathfrak{D}_2' + \dots \mathfrak{D}_m' = \sum_{v=1}^m \mathfrak{D}_v'.$$

Für jeden Teilbetrag sollen die früher entwickelten Gesetze gelten. Das heißt, jedes \mathfrak{D}_v' soll aus unendlich vielen Komponenten zusammengesetzt sein, deren Zeitkonstanten sich in der in § 4 angegebenen Weise um einen wahrscheinlichsten Wert T_v verteilen. Für die zugehörige Nachwirkungsfunktion $\psi_v(t)$ gilt wieder der Ausdruck (24), jedoch werden die Kon-

1) Ich habe hierauf bereits in der Diskussion zu einem Vortrage des Hrn. H. Jordan im Elektrotechnischen Verein am 10. Mai 1910 hingewiesen; vgl. Elektrotechn. Zeitschr. 1911. p. 172.

stanten k_v und b_v im allgemeinen für jedes v andere Werte haben. Die Nachwirkungsfunktion des Dielektrikums ist dann einfach

$$\psi(t) = \sum_{v=1}^m \psi_v(t),$$

und die Eigenschaften im konstanten oder wechselnden elektrischen Felde ergeben sich durch Superposition der Wirkungen, die von den m Teilgliedern der Nachwirkung herrühren, und die sich nach §§ 5, 6, 7 bestimmen lassen.

Im Sinne des molekulartheoretischen Bildes v. Schweidlers liegt eine solche Verallgemeinerung der Theorie für verwickelt zusammengesetzte Körper nahe. Die molekularen Dipole, denen wir die Teilnachwirkung \mathfrak{D}' zuschreiben, bilden offenbar eine Gruppe für sich, die einem bestimmten Bestandteil des Dielektrikums angehört, und die im allgemeinen andere Eigenschaften haben wird, wie eine Dipolgruppe, die einem anderen Bestandteil des Dielektrikums eigentümlich ist.

Es könnte sich an dieser Stelle der Gedanke aufdrängen, als ob die Einteilung der Dipole in Gruppen, genauer gesagt, die Zerlegung der Nachwirkung nach Gleichung (40) nur den Zweck hätte, wieder eine beliebige Anzahl willkürlicher Parameter k_v , b_v , T_0 , einzuführen, um dadurch die Theorie den Erfahrungstatsachen anpassen zu können. Praktisch liegt der Sachverhalt aber so, daß man fast immer *in einem recht ausgedehnten Zeitbereiche mit einem einzigen Gliede \mathfrak{D}' auskommt*. Die Hinzunahme eines zweiten Gliedes (oder mehrerer Glieder) wird im allgemeinen erst nötig, wenn der Gültigkeitsbereich der Darstellung beträchtlich erweitert werden soll. Ein Beispiel hierfür bildet der Kolophonumpapierkondensator, dessen Nachwirkungsstrom den durch Fig. 11 dargestellten Verlauf besitzt. Dieser Strom läßt sich, wie wir zeigten, durch ein einziges Nachwirkungsglied nach den Gleichungen (26), (27) wiedergeben. Nur für kleine Werte von t sind die beobachteten Ströme deutlich größer, als die aus der eingezeichneten Kurve zu entnehmenden berechneten Ströme.

Wir wollen *diese Abweichung der Wirkung eines zweiten Nachwirkungsgliedes mit beträchtlich kleinerem T_0 zuschreiben*. Ein solches Glied würde in der Tat zu dem gemessenen Strome

nur bei kleinen Zeitwerten merklich beitragen. Durch die Ausführung einer Wechselstrommessung bei hoher Frequenz hat sich unsere Auffassung beträchtlich stützen lassen. Aus den Ergebnissen der Gleichstrommessung bei 38° C.:

$$T_0 = 6000 \text{ sec}, \quad b = 0,368, \quad k = 2,92$$

berechnet sich nämlich für $\omega = 10000 \text{ sec}^{-1}$

$$\frac{AC}{C} = 13,1 \cdot 10^{-13} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{k}{\omega T_0} e^{\frac{1}{4b^2}} = 3,09 \cdot 10^{-7}.$$

Bei derselben Temperatur wurde gemessen

$$\operatorname{tg} \delta = 52,3 \cdot 10^{-4},$$

also etwa das 17000 fache des berechneten Wertes. Der Unterschied läßt auf das Vorhandensein von Nachwirkungsgliedern mit kleinem T_0 schließen.¹⁾

Besitzt ein Dielektrikum mehrere Nachwirkungsglieder, deren wahrscheinlichste Zeitkonstanten T_0 , genügend weit auseinanderliegen, so erscheinen (sofern b nicht allzu klein ist) auf den Verlustwinkelkurven (Abszisse: Frequenz oder Temperatur) ebenso viele mehr oder minder scharf ausgeprägte Maxima. Diese Erscheinung findet man in der Tat bei vielen Isolierstoffen²⁾, und sie allein zeigt wohl schon deutlich, daß die

1) Die Berechnung des Verlustwinkels für kurzperiodigen Wechselstrom aus der galvanometrisch ermittelten Gleichstromkurve nach dem Vorschlag v. Schweidlers ist daher nicht sehr zuverlässig. Dieses Verfahren kann, wie Jordan an dem Beispiele eines Paraffinpapierkondensators gezeigt hat (Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 1912. p. 451), zu einem mit den Meßwerten leidlich gut übereinstimmenden Ergebnisse führen, braucht es aber nicht zu tun, wie z. B. beim Kolophoniumpapierkondensator. Die Übereinstimmung zwischen Berechnung und Messung lehrt nur, daß weitere Nachwirkungsglieder von kleinem T_0 nicht vorhanden sind. Insofern bildet also der von Jordan untersuchte Paraffinpapierkondensator ein Schulbeispiel eines Dielektrikums, dessen Verhalten in dem ganzen untersuchten Zeitbereiche ($t = 10^{-6}$ bis $t = 10^{+8}$) im wesentlichen durch ein einziges Nachwirkungsglied bestimmt wird.

2) Vgl. meine Ausführungen in der Elektrotechn. Zeitschr. 1911, p. 172, sowie die Meßergebnisse von F. W. Grover, (l. c.) und von J. A. Fleming u. B. Dyke, Journ. Inst. of El. Eng. 49. p. 323. 1912; auch Electrician London 68. p. 1017. 1912. Die zahlreichen Frequenzkurven der Kapazität und des Verlustwinkels, die Grover in der erwähnten Untersuchung mitteilt, lassen sich, soweit sie nicht unmittelbar

Einführung mehrerer Nachwirkungsglieder nicht einer Schwäche der Theorie wegen geschehen muß, sondern daß sie vielmehr in dem physikalischen Sachverhalt begründet liegt.

§ 9. Die Gültigkeitsgrenzen der Theorie. Flüssige Dielektrika.

Soweit sich bis jetzt übersehen läßt, reicht die vorstehende Theorie zur Beschreibung der dielektrischen Nachwirkung *fester Dielektrika* aus.

Bei *flüssigen* Isolierstoffen hat v. Schweidler bereits gefunden, daß sie das Hopkinson'sche *Superpositionsgebot* nicht befolgen. Aus seinen Versuchen an Toluol und Petroleum geht hervor, daß diese Körper zwar dielektrische Nachwirkung zeigen, wenn sie einem konstanten Felde ausgesetzt werden, also bei der Ladung; nicht aber beim Verschwinden des Feldes, d. h. bei der Entladung. Ich habe Papierkondensatoren untersucht, die mit Paraffinöl, mit Rizinusöl oder mit Harzöl getränkt waren. Bei ihnen ist auch bei der *Entladung Nachwirkung* vorhanden, jedoch von beträchtlich *geringerer Stärke* als bei der Ladung. Daß diese Nachwirkung nicht vom Papier herrührt, ergibt sich wohl aus dem Umstande, daß sie beim Harzölkondensator viel größer ist, als beim Rizinusölkondensator, und sehr viel größer, als beim Paraffinölkondensator. Außerdem wurde bei diesen Kondensatoren die eigentümliche Erscheinung bemerkt, daß bei mehrmaligem vollständigen Laden und Entladen die Nachwirkung bei jeder späteren Ladung geringer ist als bei der vorhergehenden, jedoch nach mehreren Ladungen einem Endzustand zuzustreben scheint. Diese Erscheinung ist vielleicht so zu erklären, daß das Dielektrikum durch den Strom selbst allmählich von gewissen schwer beweglichen elektrolytischen Ionen gereinigt wird, die vermutlich von gelösten Verunreinigungen herrühren.¹⁾

als Ausschnitte aus unseren theoretischen Kurven Figg. 7, 8 (für ein einziges Nachwirkungsglied) gelten können, aus der vereinten Wirkung einiger wenigen Nachwirkungsglieder erklären; diese Teilstücke sind oft, wie z. B. in der Fig. 10 der genannten Untersuchung, schon auf den ersten Blick zu erkennen.

1) Vgl. die entsprechende Beobachtung von Jaffé am Hexan; Ann. d. Phys. 28. p. 326. 1909.

Da das Superpositionsgesetz der Nachwirkung bei den flüssigen Isolierstoffen nicht gilt, darf man auch *keine Proportionalität der Nachwirkung mit der Spannung* bei ihnen erwarten. Versuche, die diesen Punkt betreffen, sind im Gange, aber noch nicht abgeschlossen. Sie erstrecken sich insbesondere auch auf die Frage, in welcher Weise der dielektrische Verlustwinkel dieser Körper von der Spannung abhängt.

Wenn nun auch die flüssigen Dielektrika verwickelteren Nachwirkungsgesetzen folgen, als die festen Isolierstoffe, so ist doch bemerkenswert, daß ihre Nachwirkung auch manche Ähnlichkeit mit der dielektrischen Nachwirkung fester Körper aufweist. Auch bei Flüssigkeiten hat die Nachwirkungsfunktion ψ den eigentümlichen langgestreckten Verlauf. Maxima in der Temperaturkurve des Verlustwinkels habe ich bisher nicht beobachtet; dieser Winkel nimmt vielmehr bei den bisher untersuchten Flüssigkeiten mit steigender Temperatur beständig zu. Wie bei festen Körpern liegt aber in diesem *aufsteigenden Aste* die bei einer *höheren* Frequenz aufgenommene Temperaturkurve stets *unterhalb* der für eine *tiefere* Frequenz gültigen Kurve.

Es wird die Aufgabe weiterer Versuche sein, das dielektrische Verhalten flüssiger Isolierstoffe noch genauer zu erforschen und außerdem noch umfangreicheres Material zur Prüfung des Geltungsbereiches der hier gegebenen Theorie bei festen Körpern beizubringen. Ich habe Versuche in dieser Richtung begonnen; da ich aber aus äußeren Gründen auf einen baldigen Abschluß dieser sehr zeitraubenden Untersuchung nicht rechnen kann, habe ich mich entschlossen, die vorstehenden theoretischen Betrachtungen schon jetzt zu veröffentlichen, um damit auch anderen Fachgenossen die Möglichkeit der experimentellen Nachprüfung zu geben.

Zusammenfassung.

1. Die Anomalien fester Dielektrika (Nachladung, Rückstand, Energieverlust im elektrischen Wechselfelde) röhren überwiegend von der dielektrischen Nachwirkung her.
2. Stellt man das Abklingen der Nachwirkung im kon-

stanten Felde nach dem Vorschlage v. Schweidlers durch eine Reihe von Exponentialgliedern

$$\sum_n k_n e^{-\frac{t}{T_n}}$$

dar, so gruppieren sich die Zeitkonstanten T_n um einen oder mehrere wahrscheinlichste Werte nach demselben Verteilungsgesetze, das Wiechert bei der elastischen Nachwirkung gefunden hat.

3. Aus diesem Verteilungsgesetz wird der Verlauf des Nachladungs- bzw. Rückstandsstromes ermittelt.

4. Es wird das Gesetz abgeleitet, nach dem die Kapazität und die Energieverluste beim Wechselstrom von der Frequenz abhängen.

5. Es wird der Einfluß der Temperatur auf die dielektrischen Nachwirkungsscheinungen erörtert.

6. Der Vergleich mit der Erfahrung lehrt, daß die hier gegebene Theorie die bisher bekannt gewordenen Eigentümlichkeiten des Verhaltens fester Dielektrika in befriedigender Weise darstellt.

(Eingegangen 13. Januar 1913.)

2. *Träge und schwere Masse in der Relativitätsmechanik;*
von Gunnar Nordström.

Es spielt in mehreren neueren Arbeiten auf dem Gebiete der Relativitätsmechanik der Begriff der Masse der Körper eine sehr untergeordnete Rolle. Die Ursache ist leicht zu verstehen. Man kann, wie Laue¹⁾ und Herglotz²⁾ gezeigt haben, die ganze Mechanik ausgedehnter Körper aufbauen, ohne den Begriff der trügen Masse überhaupt hineinzuziehen. Der Begriff der Masse ist also nicht für die Mechanik unbedingt notwendig, und andererseits ist dieser Begriff auch nicht hinreichend, um alle Trägheitserscheinungen der Materie darzustellen, wenn man beliebigen elastischen Spannungen unterworffene Körper betrachtet.

Die Frage von der Masse der Materie ist aber trotzdem von erheblicher Wichtigkeit für die Relativitätstheorie, insbesondere für die Beurteilung der Art und Weise, in welcher die Theorie der Gravitation in die Relativitätstheorie eingefügt werden soll. Die Trägheit und die Schwere der Materie müssen jedenfalls in engster Beziehung zueinander stehen, und am einfachsten würde man dieser Wesenseinheit durch die den beiden Erscheinungen zugrunde liegende Masse Rechnung tragen. Einen solchen Massenbegriff wird man aufrecht zu halten suchen, obwohl man weiß, daß es nach der Relativitätstheorie auch Trägheitserscheinungen gibt, die sich in keiner Weise auf eine Masse zurückführen lassen. In solchen Fällen wird man mit einer besonderen Bewegungsgröße (Impuls) rechnen müssen, die nicht von der Masse eines Körpers,

1) M. Laue, *Das Relativitätsprinzip*, Braunschweig 1911, VII; Ann. d. Phys. 35. p. 524. 1911.

2) G. Herglotz, Ann. d. Phys. 36. p. 493. 1911.

sondern z. B. von dem elastischen Spannungszustande desselben abhängt.

In dem vorliegenden Aufsatze will ich die Relativitätsmechanik deformierbarer Körper in solcher Weise behandeln, daß die Möglichkeit des allgemeinen Aufrechthaltens eines Massenbegriffes deutlich hervortritt. Hierbei werde ich auch den Einfluß der Wärmeleitung auf die mechanischen Vorgänge untersuchen. Zum Schluß werde ich die Gravitation betrachten, indem ich der tragen Masse auch Schwere zuschreibe.

§ 1. Die Grundlagen der Relativitätsmechanik deformierbarer Körper.

Wir betrachten einen Körper von beliebigem Bewegungs- und Spannungszustande. Außer den elastischen Kräften möge auf den Körpern eine räumlich verteilte ponderomotorische Kraft \mathfrak{R} beliebigen Ursprungs wirken. \mathfrak{R} ist ein Vierervektor, der als „äußere“ ponderomotorische Kraft pro Volumeneinheit oder als „äußere“ bewegende Kraft pro Ruhvolumeneinheit zu bezeichnen ist.¹⁾

Nach Laue²⁾ gibt es einen symmetrischen vierdimensionalen Tensor \mathbf{T} , dessen Komponenten die räumlichen Spannungen sowie die mechanische Impuls- und Energiedichte angeben. Hiernach können wir die Bewegungsgleichungen des Körpers in folgender Form schreiben:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{R}_x = \frac{\partial \mathbf{T}_{zz}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{T}_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{T}_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{T}_{zu}}{\partial u}, \\ \mathfrak{R}_y = \frac{\partial \mathbf{T}_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{T}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{T}_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{T}_{yu}}{\partial u}, \\ \mathfrak{R}_z = \frac{\partial \mathbf{T}_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{T}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{T}_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{T}_{zu}}{\partial u}, \\ \mathfrak{R}_u = \frac{\partial \mathbf{T}_{uz}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{T}_{uy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{T}_{uz}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{T}_{uu}}{\partial u}, \end{array} \right.$$

$x, y, z, u = ict$ sind die vier Koordinaten; die Lichtgeschwindigkeit c soll eine universelle Konstante sein.

1) H. Minkowski, Göttinger Nachr. 1908. p. 107 u. 108; vgl. auch unten Gleichung (6) und (9).

2) M. Laue, Das Relativitätsprinzip p. 149.

Wir wollen jedem Raumzeitpunkte der Materie eine gewisse *Ruhmassendichte* ν zuschreiben. Diese Größe soll ein vierdimensionaler Skalar sein, wir lassen aber bis auf weiteres dieselbe sonst vollständig unbestimmt, so daß wir über den Begriff der Masse noch frei verfügen können. Aus der Ruhdichte bestimmt sich die gewöhnliche Massendichte μ durch die Gleichung

$$(2) \quad \nu = \mu \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

wo v die (dreidimensionale) Geschwindigkeit des betrachteten Punktes bedeutet. Der Einfachheit wegen setzen wir

$$q = \frac{v}{c},$$

und haben also

$$v = \mu \sqrt{1 - q^2}.$$

Nun fassen wir den vierdimensionalen Tensor \mathbf{T} als die Summe zweier solcher Tensoren auf, indem wir setzen

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}_{xx} = \mathbf{p}_{xx} + \nu \mathfrak{B}_x^2, \\ \mathbf{T}_{yy} = \mathbf{p}_{yy} + \nu \mathfrak{B}_y^2, \\ \mathbf{T}_{zz} = \mathbf{p}_{zz} + \nu \mathfrak{B}_z^2, \\ \mathbf{T}_{xy} = \mathbf{p}_{xy} + \nu \mathfrak{B}_x \mathfrak{B}_y, \\ \mathbf{T}_{xz} = \mathbf{p}_{xz} + \nu \mathfrak{B}_x \mathfrak{B}_z, \\ \mathbf{T}_{yz} = \mathbf{p}_{yz} + \nu \mathfrak{B}_y \mathfrak{B}_z, \\ \mathbf{T}_{zu} = \mathbf{p}_{zu} + \nu \mathfrak{B}_z \mathfrak{B}_u, \end{array} \right.$$

wobei \mathfrak{B} den vierdimensionalen Bewegungsvektor bedeutet. Derselbe hängt bekanntlich mit der Geschwindigkeit v durch die Gleichungen

$$(4) \quad \mathfrak{B}_x = \frac{v_x}{\sqrt{1 - q^2}}, \quad \dots \quad \mathfrak{B}_u = \frac{i c}{\sqrt{1 - q^2}}$$

zusammen. Den durch Gleichung (4) eingeführten vierdimensionalen Tensor \mathbf{p} nennen wir den *elastischen Spannungstensor*. Derselbe ist, wie \mathbf{T} , symmetrisch, indem $\mathbf{p}_{xy} = \mathbf{p}_{yx}$ usw. Der zweite Teiltensor von \mathbf{T} kann *materieller Tensor* heißen.

Wir setzen

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{R}_x^e = -\frac{\partial \mathbf{p}_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{p}_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{p}_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{p}_{xu}}{\partial u}, \\ \vdots \quad \vdots \\ \mathfrak{R}_u^e = -\frac{\partial \mathbf{p}_{ux}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{p}_{uy}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{p}_{uz}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{p}_{uu}}{\partial u}, \end{array} \right.$$

und nennen den Vektor \mathfrak{R}^e die *elastische* ponderomotorische Kraft. Unsere Bewegungsgleichungen (1) lauten nun

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{R}_x + \mathfrak{R}_x^e = \frac{\partial}{\partial x} \nu \mathfrak{B}_x^2 + \frac{\partial}{\partial y} \nu \mathfrak{B}_x \mathfrak{B}_y + \frac{\partial}{\partial z} \nu \mathfrak{B}_x \mathfrak{B}_z \\ \quad + \frac{\partial}{\partial u} \nu \mathfrak{B}_x \mathfrak{B}_u, \\ \mathfrak{R}_y + \mathfrak{R}_y^e = \frac{\partial}{\partial x} \nu \mathfrak{B}_y \mathfrak{B}_x + \frac{\partial}{\partial y} \nu \mathfrak{B}_y^2 + \frac{\partial}{\partial z} \nu \mathfrak{B}_y \mathfrak{B}_z \\ \quad + \frac{\partial}{\partial u} \nu \mathfrak{B}_y \mathfrak{B}_u, \\ \mathfrak{R}_z + \mathfrak{R}_z^e = \frac{\partial}{\partial x} \nu \mathfrak{B}_z \mathfrak{B}_x + \frac{\partial}{\partial y} \nu \mathfrak{B}_z \mathfrak{B}_y + \frac{\partial}{\partial z} \nu \mathfrak{B}_z^2 \\ \quad + \frac{\partial}{\partial u} \nu \mathfrak{B}_z \mathfrak{B}_u, \\ \mathfrak{R}_u + \mathfrak{R}_u^e = \frac{\partial}{\partial x} \nu \mathfrak{B}_u \mathfrak{B}_x + \frac{\partial}{\partial y} \nu \mathfrak{B}_u \mathfrak{B}_y + \frac{\partial}{\partial z} \nu \mathfrak{B}_u \mathfrak{B}_z \\ \quad + \frac{\partial}{\partial u} \nu \mathfrak{B}_u^2. \end{array} \right.$$

Um die Bedeutung der rechten Seiten einzusehen, formen wir dieselben um. Wir bezeichnen mit $d\nu$ das Volumen eines materiellen Teilchens des Körpers, mit $d\nu_0$ das Ruhvolumen desselben, wobei

$$(7) \quad d\nu_0 = \frac{d\nu}{\sqrt{1 - q^2}}.$$

Wenn weiter τ die Eigenzeit bedeutet,

$$(8) \quad d\tau = dt \sqrt{1 - q^2},$$

so erhält man durch Einführen von ν und Benutzen einer bekannten Formel¹⁾

$$1) \quad \frac{d}{dt} \int \varphi d\nu = \int \left\{ \operatorname{div} \varphi \nu + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} d\nu,$$

wo φ eine beliebige Funktion von x, y, z, t ist und die Integration links

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \nu \mathfrak{B}_x^2 + \frac{\partial}{\partial y} \nu \mathfrak{B}_x \mathfrak{B}_y + \frac{\partial}{\partial z} \nu \mathfrak{B}_x \mathfrak{B}_z + \frac{\partial}{\partial u} \nu \mathfrak{B}_x \mathfrak{B}_u \\ = \frac{1}{dv_0} \frac{d}{dt} (\nu \mathfrak{B}_x dv_0) = \frac{1}{dv} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\mu v_x}{\sqrt{1 - q^2}} dv \right\}. \end{array} \right.$$

Durch Vertauschung des Index x gegen y, z, u bekommt man entsprechende Gleichungen. Wenn man die gefundenen Ausdrücke in (6) einführt, erhält man die Bewegungsgleichungen in einer ähnlichen Form, die für einen materiellen Punkt gilt.

Die drei ersten der Bewegungsgleichungen sollen bekanntlich den Impulssatz, die vierte den Energiesatz ausdrücken. Um den ersten Satz näher zu studieren, setzen wir

$$(10) \quad g_x^e = - \frac{i}{c} \mathbf{p}_{zu}, \quad g_y^e = - \frac{i}{c} \mathbf{p}_{yu}, \quad g_z^e = - \frac{i}{c} \mathbf{p}_{zu},$$

und nennen den dreidimensionalen Vektor g^e die *elastische Impulsdichte*. Der in ähnlicher Weise aus dem materiellen Tensor gebildete Vektor g^m mit den Komponenten

$$g_x^m = - \frac{i}{c} \nu \mathfrak{B}_x \mathfrak{B}_u \text{ usw.}$$

soll als *materielle Impulsdichte* bezeichnet werden. Man findet

$$(11) \quad g^m = \frac{\mu v}{\sqrt{1 - q^2}}.$$

Weiter führen wir die *relativen Spannungen* t^1) durch folgende Gleichungen ein

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} t_{xx} = \mathbf{p}_{xx} + \frac{i}{c} \mathbf{p}_{zu} v_x, \\ t_{xy} = \mathbf{p}_{xy} + \frac{i}{c} \mathbf{p}_{zu} v_y, \\ \text{usw.} \end{array} \right.$$

oder nach (10)

$$(12a) \quad \left\{ \begin{array}{l} t_{xx} = \mathbf{p}_{xx} - g_x^e v_x, \\ t_{xy} = \mathbf{p}_{xy} - g_x^e v_y, \\ \text{usw.} \end{array} \right.$$

sich auf einen bestimmten Teil der Materie bezieht. Die vektoranalytischen Zeichen in diesem Aufsatze sind die von Abraham in *Theorie der Elektrizität*, Bd. I, erläuterten; sie beziehen sich immer auf dreidimensionale Vektoren.

1) M. Abraham, Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Rend. Circ. Matem. Palermo, Gleichung (10) 1909; M. Laue, l. c. p. 151.

Die relativen Spannungen bilden einen dreidimensionalen, unsymmetrischen Tensor. Diese Spannungen sind, wie ersichtlich, in ähnlicher Weise berechnet, wie der Druck auf einer bewegten Fläche in der Elektrodynamik. Es ist weiter zu bemerken, daß man dieselben relativen Spannungen erhält, wenn man in (12) anstatt \mathbf{p} \mathbf{T} schreibt, denn der zweite (materielle) Tensor, in den wir \mathbf{T} gespalten haben, gibt die relativen Spannungen Null. Deshalb sind die durch Gleichung (12) definierten relativen Spannungen mit den von Laue (L. c.) eingeführten identisch.

Wir können nun die Ausdrücke für die räumlichen Komponenten von \mathfrak{g}^e umformen. Wir erhalten nach (10) und (12a)

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{g}_x^e = - \left\{ \frac{\partial t_{zz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} \right\} \\ \quad - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{g}_x^e v_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathfrak{g}_x^e v_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathfrak{g}_x^e v_z + \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{g}_x^e \right\} \end{array} \right.$$

und entsprechendes für \mathfrak{g}_y^e und \mathfrak{g}_z^e .

Wir multiplizieren Gleichung (13) mit dv und integrieren über einen massenerfüllten (dreidimensionalen) Raum v . Das Integral des Ausdrückes in der ersten Klammer läßt sich nach dem Gaußschen Satz in ein Oberflächenintegral verwandeln. Wir erhalten, wenn wir noch auf den letzten Klammerausdruck die Formel in der Note p. 859 anwenden

$$(14) \quad \int \mathfrak{g}_x^e dv = - \int \{ t_{zz} d\mathfrak{f}_x + t_{zy} d\mathfrak{f}_y + t_{xz} d\mathfrak{f}_z \} - \frac{d}{dt} \int \mathfrak{g}_x^e dv.$$

Es sind hier $d\mathfrak{f}_x$, $d\mathfrak{f}_y$, $d\mathfrak{f}_z$ die Komponenten eines Flächen-elementes der Begrenzungsfäche des betrachteten Bereiches v ; $d\mathfrak{f}$ aufgefaßt als ein Vektor von der Richtung der äußeren Normale. Das Zeichen d/dt bezeichnet die zeitliche Veränderung in einem abgegrenzten Teil der Materie.

Entsprechende Ausdrücke gelten für die übrigen räumlichen Achsenrichtungen, und wir sehen, daß die elastische Kraft teils durch die als Flächenkräfte wirkenden relativen elastischen Spannungen, teils durch die Veränderung des elastischen Impulses bestimmt wird.

Die erste der Bewegungsgleichungen können wir nun nach (6), (9) und (14) in folgender Integralform schreiben

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \mathfrak{R}_x dv - \int \{ t_{xx} d\mathfrak{f}_x + t_{xy} d\mathfrak{f}_y + t_{xz} d\mathfrak{f}_z \} - \frac{d}{dt} \int \mathfrak{g}_x dv \\ = \frac{d}{dt} \int \frac{\mu v_x}{\sqrt{1 - q^2}} dv = \frac{d}{dt} \int \mathfrak{g}_x^m dv. \end{array} \right.$$

Diese Gleichung und die beiden analogen für die übrigen räumlichen Achsenrichtungen drücken den Impulssatz für einen abgegrenzten Teil der Materie aus.

Die Dissymmetrie des relativen Spannungstensors bedeutet, daß die elastischen Kräfte im allgemeinen auf jeden Teil des Körpers ein Drehmoment ausüben.¹⁾ Nach der Elastizitätstheorie ist das auf die Volumeneinheit wirkende Drehmoment um eine Richtung parallel der x -Achse

$$t_{yz} - t_{xy} = v_y \mathfrak{g}_z^e - v_z \mathfrak{g}_y^e.$$

Man hat folglich vektoranalytisch ausgedrückt für das Drehmoment n pro Volumeneinheit

$$(16) \quad n = [v g^e].$$

Dieses Drehmoment muß also immer auftreten, wenn die elastische Impulsdichte eine auf die Geschwindigkeit senkrechte Komponente hat. Das Drehmoment ist also dann auch für das Aufrechthalten einer gleichförmigen Translationsbewegung des elastisch gespannten Körpers notwendig. Hierin liegt bekanntlich ein wesentlicher Unterschied zwischen der klassischen und der Relativitätsmechanik, dessen Grund beim Aufstellen des Flächensatzes deutlich hervortritt.²⁾ Wir wollen jedoch hier darauf nicht eingehen.

Während die drei ersten der Bewegungsgleichungen den Impulssatz ausdrücken, drückt die letzte dieser Gleichungen den Energiesatz aus. Wir setzen

$$(17) \quad \mathfrak{E}^e = c^2 \mathfrak{g}^e,$$

$$(18) \quad \mathfrak{E}^m = c^2 \mathfrak{g}^m = \frac{c^2 \mu v}{\sqrt{1 - q^2}},$$

also

$$(17a) \quad \mathfrak{E}_x^e = -i c p_{xu} \text{ usw.,}$$

$$(18a) \quad \mathfrak{E}_x^m = -i c v \mathfrak{B}_x \mathfrak{B}_u \text{ usw.,}$$

1) M. Laue, I. c. p. 168.

2) M. Laue, Ann. d. Phys. 35. p. 536. 1911.

und weiter

$$(19) \quad \psi^e = - \mathbf{p}_{uu},$$

$$(20) \quad \psi^m = - \nu \mathfrak{B}_u^2 = \frac{c^2 \mu}{\sqrt{1 - q^2}}.$$

Es ergibt sich dann nach (5) für $i c \mathfrak{R}_u^e$ ein Ausdruck, der, vektoranalytisch geschrieben, lautet

$$(21) \quad i c \mathfrak{R}_u^e = \operatorname{div} \mathfrak{S}^e + \frac{\partial \psi^e}{\partial t}.$$

Die letzte der Bewegungsgleichungen (6), mit $-ic$ multipliziert, können wir nun schreiben

$$(22) \quad -ic \mathfrak{R}_u = \operatorname{div} (\mathfrak{S}^e + \mathfrak{S}^m) + \frac{\partial}{\partial t} (\psi^e + \psi^m).$$

Das ist die Energiegleichung. Wir sehen ein, daß die Vektoren \mathfrak{S}^e und \mathfrak{S}^m den *elastischen* bzw. den *materiellen Energiestrom* ausdrücken und daß die Größen ψ^e und ψ^m die entsprechenden *Energiedichten* sind. Die Größe $-ic \mathfrak{R}_u$ gibt die durch die äußere Kraft \mathfrak{R} bedingte Energiezufuhr pro Volumen- und Zeiteinheit an. Die Bedeutung der rechten Seite ist ohne weiteres einzusehen. Durch Integration über einen beliebigen Raum und Anwendung des Gaußschen Satzes erhält man den Energiesatz ausgedrückt für einen im benutzten räumlichen Bezugssysteme (x, y, z) festen Raumbereich.

§ 2. Nähere Untersuchung der elastischen Zustandsgrößen.

Um eine klare Vorstellung von den elastischen Größen zu gewinnen, transformieren wir den Spannungstensor \mathbf{p} im betrachteten Raumzeitpunkte auf Ruhe. Die Komponenten des Tensors geben dann das Schema

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{cccc} \mathbf{p}_{xx}^0 & \mathbf{p}_{xy}^0 & \mathbf{p}_{xz}^0 & 0, \\ \mathbf{p}_{yx}^0 & \mathbf{p}_{yy}^0 & \mathbf{p}_{yz}^0 & 0, \\ \mathbf{p}_{zx}^0 & \mathbf{p}_{zy}^0 & \mathbf{p}_{zz}^0 & 0, \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{p}_{uu}^0; \end{array} \right.$$

denn im Falle der Ruhe kann der elastische Spannungszustand keinen Energiestrom und also auch keinen Impuls geben.¹⁾

1) Wenn Wärmeleitung vorkommt, ist deren Einfluß unter der Wirkung der äußeren Kraft \mathfrak{R} zu rechnen. Vgl. unten § 5.

Wir bemerken nebenbei, daß im Falle der Ruhe die Gesetze der gewöhnlichen Elastizitätstheorie gelten. Wir können also die sechs räumlichen Spannungskomponenten $p_{xx}^0, p_{xy}^0, \dots$ in Beziehung zu den Deformationsgrößen der Ruhe bringen.¹⁾ Wir wollen jedoch hierauf nicht näher eingehen.

Man sieht leicht ein, daß p_{uu}^0 ein vierdimensionaler Skalar sein muß. Es ist

$$-c^2 p_{uu}^0 = p_{xx} \mathfrak{B}_x^2 + p_{yy} \mathfrak{B}_y^2 + p_{zz} \mathfrak{B}_z^2 + p_{uu} \mathfrak{B}_u^2 + 2p_{xy} \mathfrak{B}_x \mathfrak{B}_y + 2p_{xz} \mathfrak{B}_x \mathfrak{B}_z + \dots,$$

denn die rechte Seite ist gegen Lorentztransformationen invariant, und bei Transformation auf Ruhe verschwinden neun der zehn Glieder, wobei man die Identität $-c^2 p_{uu}^0 = -c^2 p_{uu}^0$ erhält.

Es ist weiter nach (19) und (20)

$$(24) \quad \psi = -p_{uu}^0 + c^2 v$$

die *Ruhenergiedichte* der Materie, welche auch ein vierdimensionaler Skalar ist. Da v vorläufig unbestimmt ist, könnte man diese Größe nun so definieren, daß $p_{uu}^0 = 0$ wird. Wir wollen indessen bis auf weiteres keine solche Festsetzung machen.

Durch Transformation auf Ruhe sieht man auch die Gültigkeit folgender Gleichungssystems ein:

$$(25) \quad \begin{cases} p_{xx} \mathfrak{B}_x + p_{xy} \mathfrak{B}_y + p_{xz} \mathfrak{B}_z + p_{uu} \mathfrak{B}_u = p_{uu}^0 \mathfrak{B}_x, \\ p_{yx} \mathfrak{B}_x + p_{yy} \mathfrak{B}_y + p_{yz} \mathfrak{B}_z + p_{uu} \mathfrak{B}_u = p_{uu}^0 \mathfrak{B}_y, \\ p_{zx} \mathfrak{B}_x + p_{zy} \mathfrak{B}_y + p_{zz} \mathfrak{B}_z + p_{uu} \mathfrak{B}_u = p_{uu}^0 \mathfrak{B}_z, \\ p_{uz} \mathfrak{B}_x + p_{uy} \mathfrak{B}_y + p_{uz} \mathfrak{B}_z + p_{uu} \mathfrak{B}_u = p_{uu}^0 \mathfrak{B}_u. \end{cases}$$

Aus den drei ersten dieser Gleichungen erhalten wir Ausdrücke für die Komponenten des elastischen Energiestromes und der Impulsdichte. Durch Benutzen der Gleichungen (4) finden wir nämlich

$$-ic p_{uz} = -p_{uu}^0 v_x + p_{xx} v_x + p_{xy} v_y + p_{xz} v_z,$$

also

$$(26) \quad \begin{cases} \mathfrak{G}_x = c^2 g_x = -p_{uu}^0 v_x + p_{xx} v_x + p_{xy} v_y + p_{xz} v_z, \\ \mathfrak{G}_y = c^2 g_y = -p_{uu}^0 v_y + p_{yx} v_x + p_{yy} v_y + p_{yz} v_z, \\ \mathfrak{G}_z = c^2 g_z = -p_{uu}^0 v_z + p_{zx} v_x + p_{zy} v_y + p_{zz} v_z. \end{cases}$$

1) Vgl. G. Herglotz, I. c.

Wir können diese Vektorkomponenten auch durch die relativen Spannungen ausdrücken, indem wir mittels (12a) die \mathbf{p} eliminieren. Wir erhalten

$$(26a) \quad \mathfrak{S}_x^e (1 - q^2) = -p_{uu}^0 v_x + t_{xz} v_x + t_{xy} v_y + t_{zz} v_z$$

und entsprechendes für die beiden übrigen Komponenten.

Aus der letzten Gleichung (25) ergibt sich für die elastische Energiedichte der Ausdruck

$$(27) \quad \psi^e = -p_{uu}^0 + g^e v.$$

§ 3. Die Veränderungen der Masse und der Ruhenergie.

Um das Gesetz der Veränderlichkeit der Masse zu erhalten, multiplizieren wir die Gleichungen (6) der Reihe nach mit \mathfrak{B}_x , \mathfrak{B}_y , \mathfrak{B}_z , \mathfrak{B}_u und addieren. Wir beachten hierbei, daß

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_x \left\{ \frac{\partial}{\partial x} v \mathfrak{B}_x^2 + \frac{\partial}{\partial y} v \mathfrak{B}_x \mathfrak{B}_y + \frac{\partial}{\partial z} v \mathfrak{B}_x \mathfrak{B}_z + \frac{\partial}{\partial u} v \mathfrak{B}_x \mathfrak{B}_u \right\} \\ = \mathfrak{B}_x^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} v \mathfrak{B}_x + \frac{\partial}{\partial y} v \mathfrak{B}_y + \frac{\partial}{\partial z} v \mathfrak{B}_z + \frac{\partial}{\partial u} v \mathfrak{B}_u \right\} \\ + \frac{1}{2} v \left\{ \mathfrak{B}_x \frac{\partial \mathfrak{B}_x^2}{\partial x} + \mathfrak{B}_y \frac{\partial \mathfrak{B}_x^2}{\partial y} + \mathfrak{B}_z \frac{\partial \mathfrak{B}_x^2}{\partial z} + \mathfrak{B}_u \frac{\partial \mathfrak{B}_x^2}{\partial u} \right\} \text{ usw.} \end{aligned}$$

Da weiter nach den Grundsätzen der Relativitätstheorie

$$(28) \quad \mathfrak{B}_x^2 + \mathfrak{B}_y^2 + \mathfrak{B}_z^2 + \mathfrak{B}_u^2 = -c^2,$$

erhalten wir

$$(29) \quad \begin{cases} \mathfrak{B}_x (\mathfrak{R}_x + \mathfrak{R}_x^e) + \mathfrak{B}_y (\mathfrak{R}_y + \mathfrak{R}_y^e) + \mathfrak{B}_z (\mathfrak{R}_z + \mathfrak{R}_z^e) + \mathfrak{B}_u (\mathfrak{R}_u + \mathfrak{R}_u^e) \\ = -c^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} v \mathfrak{B}_x + \frac{\partial}{\partial y} v \mathfrak{B}_y + \frac{\partial}{\partial z} v \mathfrak{B}_z + \frac{\partial}{\partial u} v \mathfrak{B}_u \right\}. \end{cases}$$

Diese Gleichung gibt die Veränderlichkeit der Masse mit der Zeit an, denn, wenn dv_0 das Ruhvolumen eines materiellen Teilchens bezeichnet, ist (vgl. Gleichung (9))

$$(30) \quad \frac{\partial}{\partial x} v \mathfrak{B}_x + \frac{\partial}{\partial y} v \mathfrak{B}_y + \frac{\partial}{\partial z} v \mathfrak{B}_z + \frac{\partial}{\partial u} v \mathfrak{B}_u = \frac{1}{dr_0} \frac{d}{dt} (v dv_0),$$

wo $v dv_0 = \mu dv$ die Masse des Teilchens.

Wenn die Summe der äußeren und der elastischen Kraft auf dem Bewegungsvektor \mathfrak{B} orthogonal steht, ist also die Masse der Materie mit der Zeit unveränderlich, aber sonst nicht.

Wir wollen noch eine Formel für die elastische Kraft aufstellen, und differentiieren zu diesem Zweck die Gleichungen (25) nach x, y, z, u und addieren. Wir erhalten so nach einfacher Umformung und Beachtung von (5)

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B}_x \mathfrak{R}_x^e + \mathfrak{B}_y \mathfrak{R}_y^e + \mathfrak{B}_z \mathfrak{R}_z^e + \mathfrak{B}_u \mathfrak{R}_u^e \\ = \mathbf{P}_{xx} \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \mathbf{P}_{yy} \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \mathbf{P}_{zz} \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z} + \mathbf{P}_{uu} \frac{\partial \mathfrak{B}_u}{\partial u} \\ + \mathbf{P}_{xy} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} \right\} + \mathbf{P}_{xz} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x} \right\} \\ + \mathbf{P}_{zu} \{ \} + \mathbf{P}_{yz} \{ \} + \mathbf{P}_{yu} \{ \} + \mathbf{P}_{zu} \{ \} \\ - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{P}_{uu}^0 \mathfrak{B}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{P}_{uu}^0 \mathfrak{B}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{P}_{uu}^0 \mathfrak{B}_z \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{P}_{uu}^0 \mathfrak{B}_u \right\}. \end{array} \right.$$

Wenn (29) von (31) subtrahiert wird, ergibt sich unter Beachtung von (24)

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \Psi \mathfrak{B}_x + \frac{\partial}{\partial y} \Psi \mathfrak{B}_y + \frac{\partial}{\partial z} \Psi \mathfrak{B}_z + \frac{\partial}{\partial u} \Psi \mathfrak{B}_u \\ = - \{ \mathfrak{B}_x \mathfrak{R}_x + \mathfrak{B}_y \mathfrak{R}_y + \mathfrak{B}_z \mathfrak{R}_z + \mathfrak{B}_u \mathfrak{R}_u \} \\ - \mathbf{P}_{xx} \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} - \mathbf{P}_{yy} \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} - \mathbf{P}_{zz} \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z} - \mathbf{P}_{uu} \frac{\partial \mathfrak{B}_u}{\partial u} \\ - \mathbf{P}_{xy} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} \right\} - \mathbf{P}_{xz} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x} \right\} \\ - \mathbf{P}_{zu} \{ \} - \mathbf{P}_{yz} \{ \} - \mathbf{P}_{yu} \{ \} - \mathbf{P}_{zu} \{ \}. \end{array} \right.$$

Diese Gleichung drückt den Energiesatz für eine von der Materie mitgeführte Ruhvolumeneinheit aus, im Gegensatz zu Gleichung (22), die sich auf eine im benutzten räumlichen Bezugssysteme feste Volumeneinheit bezieht. Die Gleichung (32) ist vollkommen symmetrisch in bezug auf x, y, z, u ; daß sie wirklich den Energiesatz ausdrückt, findet man leicht durch Transformation auf Ruhe.

§ 4. Definition der tragen Masse.

Bis jetzt haben wir die Ruhmassendichte als eine völlig beliebige Funktion der vier Koordinaten der Raumzeitpunkte der Materie betrachtet. Wir wollen nun diese Unbestimmt-

heit aufheben und deshalb zunächst die verschiedenen Möglichkeiten hierfür ins Auge fassen.

Es ist in Gleichung (24)

$$\Psi = -p_{uu}^0 + c^2 \nu$$

die Ruhenergiedichte Ψ eine definierte Größe; über eine der Größen p_{uu}^0 und ν können wir aber frei verfügen. Von p_{uu}^0 fordern wir, daß es Null wird, wenn in dem betrachteten Körper keine elastischen Spannungen auftreten; denn der Tensor p soll den elastischen Spannungszustand, und nur denselben, darstellen. Wenn also auf Ruhe transformiert (Schema 23) alle räumliche Komponenten von p Null sind, soll auch p_{uu}^0 Null sein. Dies kann aber in verschiedener Weise erzielt werden.

Wenn man nur solche Körper betrachtet, in denen ein allseitiger Normaldruck herrscht, kann man leicht die Ruhedichte ν in solcher Weise definieren, daß (wenn keine Wärmeleitung vorkommt) die gesamte Trägheit des Körpers durch seine Masse bestimmt wird. Man hat hierfür nur in das Schema (23) zu setzen¹⁾

$$p_{xx}^0 = p_{yy}^0 = p_{zz}^0 = p_{uu}^0,$$

$$0 = p_{xy}^0 = p_{xz}^0 = p_{zu}^0 = \dots,$$

wodurch nach (24) ν bestimmt wird.

Dann ist der Spannungstensor p in einen Skalaren ausgearbeitet, und die elastische Impulsdichte g^e wird unabhängig von der Bewegung gleich Null.

Indessen läßt sich, soweit ich sehe, diese Auffassung der Masse nicht in ungezwungener Weise auf den allgemeinen Fall, daß in den Körpern auch (relative) Tangentialspannungen auftreten, erweitern. Für den allgemeinen Fall scheint mir die einfachste und zweckmäßigste Definition in der Feststellung

$$(33) \quad c^2 \nu = \Psi$$

zu liegen. Die Ruhmassendichte wird also proportional der Ruhenergiedichte gesetzt. Es ist dann nach (24)

$$(34) \quad p_{uu}^0 = 0,$$

1) G. Nordström, Physik. Zeitschr. 12. p. 854. 1911; M. Laue
Das Relativitätsprinzip p. 151.

und mehrere unserer früheren Gleichungen vereinfachen sich dadurch.

Es bleibt natürlich der sachliche Inhalt der Relativitätsmechanik davon vollkommen unberührt, in welcher Weise wir die träge Masse definieren. Erst wenn wir später in § 6 der tragen Masse auch Schwere zuschreiben, erhält unsere Definition eine mehr als formale Bedeutung.

Indem wir nun durch die Definition (33) den Begriff der Masse feststellen, haben wir zu bemerken, daß in jedem bewegten und elastisch gespannten Körper ein Impuls g^e auftritt, der sich nicht aus der Masse, sondern aus dem elastischen Spannungszustand des Körpers bestimmt. Wir erhalten nach (26) und (26a)

$$(35) \quad \begin{cases} g_x^e = \frac{1}{c^2} (\mathbf{p}_{xx} v_x + \mathbf{p}_{xy} v_y + \mathbf{p}_{xz} v_z) \\ \quad = \frac{1}{c^2(1 - \alpha^2)} (\mathbf{t}_{xx} v_x + \mathbf{t}_{xy} v_y + \mathbf{t}_{xz} v_z) \text{ usw.} \end{cases}$$

Dieser Impuls tritt auch dann auf, wenn in dem betrachteten Körper ein allseitiger Normalsdruck herrscht. In diesem Falle läßt sich g^e aus einer *scheinbaren* tragen Masse ableiten, die sich zu der durch Gleichung (33) definierten addiert.

5. Einfluß der Wärmeleitung.

Alle die aufgestellten Gleichungen gelten auch dann, wenn in den betrachteten Körpern Wärmeleitung vorkommt, denn die Einflüsse der Wärmeleitung können einer im Wärmeleitungsfelde auftretenden ponderomotorischen Kraft \mathfrak{F}^w zugeschrieben werden, welche Kraft in der äußeren Kraft \mathfrak{F} mitzurechnen ist. Von der Wärmeleitungskraft \mathfrak{F}^w spielt die energetische Komponente \mathfrak{F}_u^w die wesentliche Rolle. Wie alle ponderomotorischen Kräfte soll nach unseren Grundannahmen auch \mathfrak{F}^w sich aus einem symmetrischen vierdimensionalen Tensor ableiten. Wir bezeichnen den Wärmeleitungstensor mit w , haben also

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{R}_x^w = -\frac{\partial w_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial w_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial w_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial w_{zu}}{\partial u}, \\ \dots \quad \dots \\ \mathfrak{R}_u^w = -\frac{\partial w_{uz}}{\partial x} - \frac{\partial w_{uy}}{\partial y} - \frac{\partial w_{uz}}{\partial z} - \frac{\partial w_{uu}}{\partial u}, \end{array} \right.$$

und es ist hier z. B.

$$w_{zu} = w_{uz} \text{ usw.}$$

Im Falle der Ruhe gibt der Tensor w das folgende Schema:

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & w_{zu}^0, \\ 0 & 0 & 0 & w_{yu}^0, \\ 0 & 0 & 0 & w_{uz}^0, \\ w_{ux}^0 & w_{uy}^0 & w_{uz}^0 & 0, \end{array} \right.$$

denn im Ruhezustand sind die gesamten räumlichen Spannungen durch den Tensor p (Schema 23) und die gesamte Energiedichte der Materie durch $\Psi = c^2 v$ gegeben. Die reellen Komponenten von w müssen also im Falle der Ruhe Null sein.

Wenn wir die Wärmeleitung berücksichtigen, haben wir also drei vierdimensionale Tensoren, die sich auf die Materie beziehen: Wärmeleitungs-, elastischer und materieller Tensor. Im Falle der Ruhe lassen sich alle drei in das folgende gemeinsame Schema zusammenfügen:

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{ccc|c} p_{xx}^0 & p_{xy}^0 & p_{xz}^0 & w_{zu}^0 \\ p_{yx}^0 & p_{yy}^0 & p_{yz}^0 & w_{yu}^0 \\ p_{zx}^0 & p_{zy}^0 & p_{zz}^0 & w_{uz}^0 \\ \hline w_{ux}^0 & w_{uy}^0 & w_{uz}^0 & -c^2 v \end{array} \right.$$

Da wir die Festsetzung (33) getroffen haben, ist die Zerlegung des Gesamtensors in die drei Teile eine eindeutige.

Wir können einen Vierervektor \mathfrak{B} durch das Gleichungssystem

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_{xx} \mathfrak{B}_x + w_{xy} \mathfrak{B}_y + w_{xz} \mathfrak{B}_z + w_{zu} \mathfrak{B}_u = -\mathfrak{B}_x, \\ \vdots \quad \vdots \\ w_{ux} \mathfrak{B}_x + w_{uy} \mathfrak{B}_y + w_{uz} \mathfrak{B}_z + w_{uu} \mathfrak{B}_u = -\mathfrak{B}_u \end{array} \right.$$

einführen. Dieser Vektor ist, wie wir zeigen wollen, als *Ruhewärmestrom* zu bezeichnen. Der Energiesatz für die Wärmeleitung wird ja (vgl. Gleichung (21)) durch die Gleichung

$$i c \mathfrak{B}_u^w = -i c \left\{ \frac{\partial w_{ux}}{\partial x} + \frac{\partial w_{uy}}{\partial y} + \frac{\partial w_{uz}}{\partial z} + \frac{\partial w_{uu}}{\partial u} \right\}$$

ausgedrückt, und für den Fall der Ruhe erhält man aus (39)

$$ic w_{xu}^0 = - \mathfrak{W}_x^0,$$

$$ic w_{yu}^0 = - \mathfrak{W}_y^0,$$

$$ic w_{zu}^0 = - \mathfrak{W}_z^0,$$

$$0 = - \mathfrak{W}_u^0,$$

woraus die behauptete Bedeutung des Vektors \mathfrak{W} hervorgeht.

Aus den letzten Gleichungen sieht man auch, daß der Vierervektor \mathfrak{W} auf den Bewegungsvektor \mathfrak{V} orthogonal steht, so daß

$$(40) \quad \mathfrak{W}_x \mathfrak{V}_x + \mathfrak{W}_y \mathfrak{V}_y + \mathfrak{W}_z \mathfrak{V}_z + \mathfrak{W}_u \mathfrak{V}_u = 0,$$

denn die linke Seite hiervon ist gegen Lorentztransformationen invariant und auf Ruhe transformiert gleich Null.

Der Tensor w läßt sich durch ein „Tensorprodukt“¹⁾ aus den beiden Vierervektoren \mathfrak{W} und \mathfrak{V} ausdrücken. Es gelten, wie man durch Transformation auf Ruhe findet, für die Komponenten von w folgende Ausdrücke

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_{xx} = \frac{2}{c^2} \mathfrak{W}_x \mathfrak{V}_x, \\ w_{uu} = \frac{2}{c^2} \mathfrak{W}_u \mathfrak{V}_u, \\ w_{xy} = \frac{1}{c^2} \{ \mathfrak{W}_x \mathfrak{V}_y + \mathfrak{W}_y \mathfrak{V}_x \}, \\ w_{zu} = \frac{1}{c^2} \{ \mathfrak{W}_z \mathfrak{V}_u + \mathfrak{W}_u \mathfrak{V}_z \}, \\ \text{usw.} \end{array} \right.$$

Für die Energiedichte ψ^w und den Energiestrom \mathfrak{S}^w des Wärmeleitungsfeldes hat man natürlich

$$(42) \quad \psi^w = - w_{uu},$$

$$(43) \quad \mathfrak{S}_x^w = - ic w_{xu}, \quad \mathfrak{S}_y^w = - ic w_{yu}, \quad \mathfrak{S}_z^w = - ic w_{zu}.$$

Diese Größen lassen sich auch durch den Vektor \mathfrak{W} ausdrücken. Wir finden zunächst aus (40)

$$(44) \quad - ic \mathfrak{W}_u = \mathfrak{W} \mathfrak{v},$$

1) Vgl. W. Voigt, Göttinger Nachr. p. 500. 1904.

wo rechts das skalare Produkt aus zwei dreidimensionalen Vektoren steht. Wir erhalten weiter nach (41)

$$(42a) \quad \psi^w = \frac{2}{c^2 \sqrt{1 - q^2}} \mathfrak{W} v,$$

$$(43a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{S}^w = \frac{1}{\sqrt{1 - q^2}} \left\{ \mathfrak{W} + \frac{v}{c^2} (\mathfrak{W} v) \right\} \\ = \frac{\mathfrak{W}}{\sqrt{1 - q^2}} + v \frac{\psi^w}{2}. \end{array} \right.$$

Dem Energiestrom \mathfrak{S}^w entspricht natürlich die Impulsdichte

$$g^w = \frac{1}{c^2} \mathfrak{S}^w.$$

Die letzte der Gleichungen (36), mit ic multipliziert, können wir schreiben

$$(45) \quad ic \mathfrak{R}_u^w = \operatorname{div} \mathfrak{S}^w + \frac{\partial \psi^w}{\partial t},$$

was in die Energiegleichung (22) eingeführt werden kann. Wenn \mathfrak{R}^w die einzige vorkommende „äußere“ Kraft ist, hat man natürlich in allen Gleichungen der früheren Paragraphen $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^w$ zu setzen, und also speziell in (22) $\mathfrak{R}_u = \mathfrak{R}_u^w$.

Wir wollen noch ein paar Formeln für \mathfrak{R}_u^w aufstellen. Wenn wir die Ausdrücke (41) in das Gleichungssystem (36) einführen, erhalten wir nach einfacher Umformung¹⁾

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} c^2 \mathfrak{R}_u^w = - \frac{d \mathfrak{W}_z}{d \tau} - \mathfrak{B}_z \left\{ \frac{\partial \mathfrak{W}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{W}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}_z}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{W}_u}{\partial u} \right\} \\ - \left\{ \mathfrak{B}_x \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x} + \mathfrak{B}_y \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial y} + \mathfrak{B}_z \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z} + \mathfrak{B}_u \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial u} \right\} \\ - \mathfrak{B}_x \left\{ \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{B}_u}{\partial u} \right\}, \end{array} \right.$$

und entsprechende Ausdrücke für die übrigen Komponenten von \mathfrak{R}^w . Wenn wir diese Ausdrücke mit $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z, \mathfrak{B}_u$ multi-

1) Es ist ja, wenn φ eine beliebige Funktion der vier Koordinaten,

$$\frac{d \varphi}{d \tau} = \mathfrak{B}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathfrak{B}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathfrak{B}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mathfrak{B}_u \frac{\partial \varphi}{\partial u}.$$

plizieren und addieren, erhalten wir weiter bei Beachtung von (40) und (28)

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B}_x \mathfrak{R}_x^w + \mathfrak{B}_y \mathfrak{R}_y^w + \mathfrak{B}_z \mathfrak{R}_z^w + \mathfrak{B}_u \mathfrak{R}_u^w \\ = \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{B}_u}{\partial u} \\ + \frac{1}{c^2} \left\{ \mathfrak{B}_x \frac{d \mathfrak{B}_x}{d \tau} + \mathfrak{B}_y \frac{d \mathfrak{B}_y}{d \tau} + \mathfrak{B}_z \frac{d \mathfrak{B}_z}{d \tau} + \mathfrak{B}_u \frac{d \mathfrak{B}_u}{d \tau} \right\}. \end{array} \right.$$

Diese Gleichung gestattet die Wärmeleitung in den Formeln (29) und (32) zu berücksichtigen.

§ 6. Die Gravitation.

Es ist ja von mehreren Seiten versucht worden, die Gravitationserscheinungen vom Standpunkt der Relativitätstheorie zu behandeln. Besonders sind zu erwähnen die Theorien von Einstein¹⁾ und Abraham.²⁾ Nach diesen beiden Theorien würde jedoch die Lichtgeschwindigkeit c nicht konstant, sondern vom Gravitationsfelde abhängig sein, und dieser Umstand würde wenigstens eine vollständige Umwälzung der Grundlagen der bisherigen Relativitätstheorie fordern.

Durch eine Veränderung der Theorie von Abraham kann man aber, wie ich am anderen Ort gezeigt habe³⁾, die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit aufrecht halten und eine Gravitationstheorie entwickeln, die mit der Relativitätstheorie in ihrer bisherigen Gestalt vereinbar ist. Da ich diese Theorie in einem Punkte verallgemeinern will, mögen die Grundlagen derselben hier wiedergegeben werden.

Ich führe ein Gravitationspotential Φ ein und setze, indem ich rationelle Einheiten benutze,

$$(48) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} = g \nu.$$

Es ist hier ν die durch Gleichung (33) definierte Ruhdichte der Materie. Das Gravitationspotential Φ und die Größe g sind auch vierdimensionale Skalare; g nennen wir *Gravitationsfaktor*.

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 35. p. 898. 1911.

2) M. Abraham, Physik. Zeitschr. 13. p. 1. 1912.

3) G. Nordström, Physik. Zeitschr. 13. p. 1126. 1912.

Das Gravitationsfeld übt auf die darin befindlichen materiellen Körper Kräfte aus. Für die ponderomotorische Gravitationskraft \mathfrak{R}^g pro Volumeneinheit setze ich

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{R}_x^g = -g \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \mathfrak{R}_y^g = -g \nu \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ \mathfrak{R}_z^g = -g \nu \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \mathfrak{R}_u^g = -g \nu \frac{\partial \Phi}{\partial u}. \end{array} \right.$$

Die Gleichungen (48) und (49) nebst dem Prinzip der konstanten c

$$(50) \quad c = \text{universelle Konstante}$$

geben die vollständige Grundlage meiner Gravitationstheorie. Diese Gleichungen bestimmen auch die rationellen Einheiten von Φ und g . Den Gravitationsfaktor g fassen wir zunächst als universelle Konstante auf; ich bemerke aber schon hier, daß nichts hindert, g als von dem inneren Zustande der Materie abhängig anzunehmen, da g nur als Faktor von ν vorkommt.

Die Grundgleichungen (48), (49), (50) fordern, daß die Masse eines materiellen Teilchens vom Gravitationspotential an demselben Ort abhängt. Um das Gesetz für diese Abhängigkeit zu erhalten, betrachten wir zweckmäßig die Bewegung eines Massenpunktes von der Masse m in einem beliebigen Gravitationsfelde. Auf den Massenpunkt mögen keine anderen Kräfte als die Gravitation wirken. Dann können wir die Bewegungsgleichungen des Massenpunktes folgendermaßen schreiben (vgl. Gleichung (6) und (9))

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} -g m \frac{\partial \Phi}{\partial x} = m \frac{d \mathfrak{B}_x}{d \tau} + \mathfrak{B}_x \frac{dm}{d \tau}, \\ -g m \frac{\partial \Phi}{\partial y} = m \frac{d \mathfrak{B}_y}{d \tau} + \mathfrak{B}_y \frac{dm}{d \tau}, \\ -g m \frac{\partial \Phi}{\partial z} = m \frac{d \mathfrak{B}_z}{d \tau} + \mathfrak{B}_z \frac{dm}{d \tau}, \\ -g m \frac{\partial \Phi}{\partial u} = m \frac{d \mathfrak{B}_u}{d \tau} + \mathfrak{B}_u \frac{dm}{d \tau}. \end{array} \right.$$

Wir multiplizieren die Gleichungen der Reihe nach mit $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z, \mathfrak{B}_u$ und addieren. Nach Beachtung von (28) erhalten wir, weil

$$\frac{d \Phi}{d \tau} = \mathfrak{B}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathfrak{B}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathfrak{B}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \mathfrak{B}_u \frac{\partial \Phi}{\partial u},$$

$$-g m \frac{d \Phi}{d \tau} = -c^2 \frac{dm}{d \tau},$$

oder

$$(52) \quad \frac{1}{m} \frac{dm}{d\tau} = \frac{g}{c^2} \frac{d\Phi}{d\tau}.$$

Wenn g als konstant angenommen wird, gibt die Integration

$$(53) \quad m = m_0 e^{\frac{g}{c^2} \Phi},$$

und diese Gleichung gibt die Abhängigkeit der Masse vom Gravitationspotential an.

Die Bewegungsgleichungen eines Massenpunktes lassen sich nach (52) auch in folgender Form schreiben,

$$(54) \quad \begin{cases} -g \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{d \mathfrak{B}_x}{d\tau} + \frac{g}{c^2} \mathfrak{B}_x \frac{d\Phi}{d\tau}, \\ -g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{d \mathfrak{B}_y}{d\tau} + \frac{g}{c^2} \mathfrak{B}_y \frac{d\Phi}{d\tau}, \\ -g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{d \mathfrak{B}_z}{d\tau} + \frac{g}{c^2} \mathfrak{B}_z \frac{d\Phi}{d\tau}, \\ -g \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{d \mathfrak{B}_u}{d\tau} + \frac{g}{c^2} \mathfrak{B}_u \frac{d\Phi}{d\tau}, \end{cases}$$

wodurch die Masse m aus den Bewegungsgleichungen wegfällt

Die Veränderlichkeit der Masse hat ihren Grund darin, daß die Gravitationskraft \mathfrak{R}^g nicht auf dem Bewegungsvektor \mathfrak{B} orthogonal steht (vgl. p. 865). Wenn wir die Gleichungen (49) mit $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z, \mathfrak{B}_u$ multiplizieren und addieren, erhalten wir

$$(55) \quad \mathfrak{B}_x \mathfrak{R}_x^g + \mathfrak{B}_y \mathfrak{R}_y^g + \mathfrak{B}_z \mathfrak{R}_z^g + \mathfrak{B}_u \mathfrak{R}_u^g = -g v \frac{d\Phi}{d\tau}.$$

Diesen Ausdruck können wir in Gleichung (29) für die Massenveränderung einführen; die Gravitationskraft \mathfrak{R}^g gehört natürlich zur „äußeren“ Kraft \mathfrak{R} .

Die Gravitationskraft \mathfrak{R}^g leitet sich aus einem symmetrischen, vierdimensionalen Tensor \mathbf{G} ab, indem

$$(56) \quad \begin{cases} \mathfrak{R}_x^g = -\frac{\partial \mathbf{G}_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{G}_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{G}_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{G}_{zu}}{\partial u}, \\ \mathfrak{R}_y^g = -\frac{\partial \mathbf{G}_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{G}_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{G}_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{G}_{uz}}{\partial u}, \\ \mathfrak{R}_z^g = -\frac{\partial \mathbf{G}_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{G}_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{G}_{zz}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{G}_{uu}}{\partial u}, \\ \mathfrak{R}_u^g = -\frac{\partial \mathbf{G}_{uz}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{G}_{uz}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{G}_{uu}}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{G}_{uu}}{\partial u}. \end{cases}$$

Gleichungen von dieser Form erhält man, wenn man in (49) für $g v$ den Ausdruck (48) einführt und dann noch eine Um-

formung vornimmt. Man findet dann auch für die Tensorkomponenten folgende Ausdrücke¹⁾:

Diese Größen geben die fiktiven Gravitationsspannungen (Druckspannungen positiv gezählt) sowie Impulsdichte, Energiestrom und Energiedichte im Gravitationsfelde. Für den Energiestrom \mathcal{E}^g und die Impulsdichte q^g hat man

$$\mathfrak{S}_x^g = c^2 g_x^g = -i c G_{xy} \text{ usw.},$$

und für die Energiedichte ψ^a

$$\psi^g = -G_{uu},$$

also nach (57) in vektoranalytischer Schreibweise

$$(58) \quad \mathfrak{G}^g = c^2 \mathfrak{g}^g = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \bigtriangledown \Phi,$$

$$(59) \quad \psi^g = \frac{1}{2} \left\{ (\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 \right\} .$$

Man sieht, daß ψ^θ immer positiv ist.

Die letzte der Gleichungen (56) mit ic multipliziert, lautet nun

$$(60) \quad i c \mathfrak{K}_u^g = \operatorname{div} \mathfrak{S}^g + \frac{\partial \psi^g}{\partial t},$$

welche Gleichung den Energiesatz für das Gravitationsfeld ausdrückt. Für Gebiete außerhalb der materiellen Körper ist

1) Genau dieselben Ausdrücke erhält Abraham in seiner erwähnten Theorie; M. Abraham, l. c. p. 3.

natürlich $\mathfrak{R}_u^g = 0$. Für Gebiete innerhalb der Körper ist Gleichung (60) mit Gleichung (22) zu vereinigen.

Die Gleichung (48) kann ja als vierdimensionale Poisson-sche Gleichung aufgefaßt, und die Integration derselben dementsprechend vorgenommen werden.¹⁾ Die Gestalt der Gleichung (48) zeigt aber auch, daß man Φ nach der bekannten Formel für das retardierte Potential berechnen kann. Man hat, wenn man die Möglichkeit berücksichtigt, daß g veränderlich sein könnte

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(x_0, y_0, z_0, t_0) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{dx dy dz}{r} (g v)_{x, y, z, t} + \text{const.} \\ \qquad \qquad \qquad = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{dx dy dz}{r} (g \mu \sqrt{1 - q^2})_{x, y, z, t} + \text{const.}, \end{array} \right.$$

wo

$$(61a) \quad \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, \\ t = t_0 - \frac{r}{c}. \end{array} \right.$$

Die Integration ist über den dreidimensionalen Raum zu erstrecken.

§ 7. Die Fallbewegung.

Wir wollen zunächst für die Bewegung eines Massenpunktes im beliebigen *statischen* Gravitationsfelde eine Gleichung aufstellen. Hierbei haben wir zwei Bemerkungen zu machen. Erstens, daß unsere Theorie keine wirklich punktförmige Massen zuläßt, denn in einem solchen Punkte würde nach (61) $\Phi = -\infty$ und also nach (53) die Masse des Punktes Null sein. Ein „Massenpunkt“ muß also immer eine gewisse Ausdehnung haben. Zweitens ist zu bemerken, daß, damit das Feld als statisch angesehen werden darf, das im Felde bewegte Teilchen so beschaffen sein muß, daß sein eigenes Feld, auch in unmittelbarer Nähe des Teilchens, im Verhältnis zum äußeren Felde verschwindend schwach ist.

1) M. Abraham, Physik. Zeitschr. 13. p. 5. 1912; A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 33. p. 685. 1910.

Im statischen Felde ist ja

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

Wir multiplizieren die drei ersten der Gleichungen (54) mit v_x, v_y, v_z und addieren. Links erhalten wir dann $-g v \nabla \Phi$. Es ist ja weiter allgemein

$$(62) \quad \frac{d \mathfrak{B}_x}{dt} = \frac{1}{1-q^2} \frac{dv_x}{dt} + \frac{v_x}{c^2(1-q^2)^2} v \frac{dv}{dt} \text{ usw.},$$

also

$$v_x \frac{d \mathfrak{B}_x}{dt} + v_y \frac{d \mathfrak{B}_y}{dt} + v_z \frac{d \mathfrak{B}_z}{dt} = \frac{1}{(1-q^2)^2} v \frac{dv}{dt}.$$

Da weiter in unserem Falle

$$\frac{d \Phi}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-q^2}} v \nabla \Phi,$$

erhalten wir

$$-g v \nabla \Phi = \frac{1}{(1-q^2)^2} v \frac{dv}{dt} + g \frac{q^2}{1-q^2} v \nabla \Phi,$$

und schließlich

$$(63) \quad -g v \nabla \Phi = \frac{1}{1-q^2} v \frac{dv}{dt}.$$

Wir wollen nun speziell annehmen, daß das Gravitationsfeld homogen und parallel der z -Achse ist, daß also

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \text{const.}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = 0,$$

und untersuchen die Bewegung eines Massenpunktes in diesem Felde. Die dritte der Gleichungen (54) gibt

$$-g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{1-q^2} \frac{dv_z}{dt} + \frac{v_z}{c^2(1-q^2)^2} v \frac{dv}{dt} + g \frac{v_z^2}{c^2(1-q^2)} \frac{\partial \Phi}{\partial z};$$

durch Beachtung von (63) finden wir, daß die beiden letzten Glieder einander aufheben, und wir erhalten

$$\frac{dv_z}{dt} = -(1-q^2) g \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Die erste der Gleichungen (54) gibt in ähnlicher Weise

$$0 = \frac{1}{1-q^2} \frac{dv_x}{dt} + \frac{v_x}{c^2(1-q^2)^2} v \frac{dv}{dt} + g \frac{v_x v_z}{c^2(1-q^2)} \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Auch hier heben die beiden letzten Glieder einander auf; es wird $dv_x/dt = 0$. Da gleiches für dv_y/dt gelten muß, erhalten

wir für einen Massenpunkt im homogenen Gravitationsfelde die Bewegungsgleichungen

$$(64) \quad \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) g \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ \frac{dv_z}{dt} = \frac{dv_y}{dt} = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sagen folgendes aus. Die Bewegungskomponente senkrecht zur Feldrichtung ist gleichförmig. Die Fallbeschleunigung ist um so kleiner, je größer die Geschwindigkeit ist, aber unabhängig von der Richtung der Geschwindigkeit. Ein in horizontaler Richtung geworfener Körper fällt langsamer als ein ohne Anfangsgeschwindigkeit vertikal fallender. Man sieht auch ein, daß ein rotierender Körper langsamer fallen muß als ein nicht rotierender. Doch ist natürlich für erreichbare Rotationsgeschwindigkeiten der Unterschied viel zu gering, um der Beobachtung zugänglich zu sein.

Diese Resultate regen die Frage an, ob nicht auch die Molekularbewegungen eines fallenden Körpers auf die Fallbeschleunigung einen Einfluß haben. Wenigstens läßt sich die Möglichkeit nicht verneinen, daß dies der Fall ist. Es ist dann die Theorie der Gravitation einfach darin zu modifizieren, daß man den Gravitationsfaktor g nicht als konstant, sondern als von den Molekularbewegungen des Körpers abhängig betrachtet. Diese Möglichkeit haben wir deshalb bei den früheren Entwickelungen offen gelassen. Es sei in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen, daß auch die Massendichte eines Körpers von den Molekularbewegungen abhängt, indem die Ruhenergiedichte, die nach Gleichung (33) v bestimmt, von jenen Bewegungen beeinflußt wird.

Diejenigen Fragen der Gravitationstheorie, die mit dem atomistischen Aufbau der Materie zusammenhängen, liegen indessen außerhalb des Rahmens dieses Aufsatzes.

Helsingfors, Januar 1913.

(Eingegangen 21. Januar 1913.)

**3. Die elastischen Konstanten von Quarzglas;
von Felix Stumpf.**

1. Da die elastischen Konstanten des kristallinischen Quarzes von W. Voigt¹⁾ vollständig bestimmt worden sind, lassen sich aus ihnen unter gewissen Voraussetzungen durch geeignete Mittelwertsbildung die Konstanten eines aus kleinen Kristallbrocken zusammengesetzten „quasiisotropen“ Körpers²⁾ bilden. Nach W. Voigt erhält man dann speziell für das Verhältnis c/c_1 der beiden Konstanten, welches für isotrope Körper nach der Poissonschen Theorie den Wert 3 haben sollte, bei Quarz etwa 14. Beobachtungen an Feuerstein und Opal lieferten rund 12 bzw. 16.

Da es nicht unmöglich erschien, daß man auch das Quarzglas als einen solchen quasiisotropen Körper ansehen dürfte, so hat mich Hr. Prof. W. Voigt aufgefordert, die Beobachtungen an diesem Stoffe durchzuführen.

Es wurden vier Stäbchen aus amorphem Quarz beobachtet, welche durch Dr. Steeg und Reuter aus einer größeren von Heraeus hergestellten Platte herausgeschnitten waren. Sie waren in der Form ziemlich vollkommen, und auch das Material erschien vertrauenswürdig. Da es sich um ein größeres Stück handelte, waren Älotropien, die bei Fäden oder dünnen Stäben nicht ausgeschlossen sind, unwahrscheinlich. In der Tat zeigten die Präparate nur sehr unbedeutende Doppelbrechung.

Die Dimensionen der Stäbchen waren ungefähr 1,4:6:80 mm, die Dichte derselben betrug im Mittel 2,2036.

Es liegen nun allerdings von anderer Seite einige Beobachtungen über denselben Gegenstand vor. So hat Threlfall³⁾ die Biegungs- und Torsionskonstanten E und T an Quarzfäden gemessen. Seine Werte liegen für E zwischen 4210 und 7700 kg/mm², für T zwischen 2120 und 3500 kg/mm². Ebenso

1) W. Voigt, Lehrb. der Kristallphysik p. 758.

2) W. Voigt, l. c. p. 954 und Wied. Ann. 38. p. 573. 1889.

3) R. Threlfall, Phil. Mag. 30. p. 99. 1890.

findet Boys¹⁾ $E = 6120$, $T = 2426$ und für die Poissonsche Konstante $\mu = 0,26$. Horton²⁾ gibt an $T = 3060$. Ferner hat Auerbach³⁾ aus der Messung der Härte gefunden $E(1-\mu^2) = 6970$, woraus unter Benutzung des von Boys gefundenen Wertes für μ folgen würde $E = 7490$ (und unter Benutzung des unten angegebenen Wertes $\mu = 0,133 : E = 7112$). F. A. Schulze⁴⁾ findet durch Beobachtung der Biegungs- und Torsionstöne eines Stabes $E = 6238$, $T = 2470$, $\mu = 0,26$. Schidlof und Alfthan-Klotz⁵⁾ finden aus der kubischen Ausdehnung eines Kolbens $E = 6240$, $T = 2390$, $\mu = 0,306$.

Diese Resultate erledigen die Frage nach den Elastizitätskonstanten des geschmolzenen Quarzes ersichtlich noch nicht. Insbesondere ist eine völlige Isotropie eines gezogenen Quarzglasfadens und eines geblasenen Kolbens nicht erwiesen und kaum wahrscheinlich. Die Auerbachsche Methode gibt nur ein Aggregat der beiden elastischen Parameter und dies nicht mit sehr großer Genauigkeit. Bei den Schulzeschen Beobachtungen, die einen einzelnen Stab, also vermutlich in ähnlicher Form hergestelltes Material, benutzt, ist die Isotropie gleichfalls nicht ganz sicher. Außerdem dürfte die Methode der Klangstäbe eine wesentliche Fehlerquelle enthalten, ganz abgesehen von der Schwierigkeit der Bestimmung sehr hoher Töne. Wie nämlich Hr. Voigt mir bemerkte, ist sehr schwer glaublich, daß der als festgehalten betrachtete Querschnitt des Stäbchens bei Hrn. Schulze faktisch absolut fest gehalten worden ist. Eine Klemmvorrichtung von derartig zuverlässiger Wirkung bei einem zerbrechlichen Präparat dürfte nicht existieren. Es ist daher ziemlich wahrscheinlich, daß nicht der letzte Querschnitt außerhalb der Klemme, sondern ein mehr oder weniger tief innerhalb derselben liegender den Schwingungsknoten repräsentiert. Diese Abweichung dürfte bei den Torsionsschwingungen größer gewesen sein als bei den transversalen Biegungsschwingungen. (Vielleicht ist die Starrheit der Befestigung auch dadurch herabgemindert gewesen,

1) C. V. Boys, Phil. Mag. 30. p. 116. 1890.

2) F. Horton, Proc. Roy. Soc. 74. p. 401. 1905.

3) F. Auerbach, Ann. d. Phys. 3. p. 116. 1900.

4) F. A. Schulze, Ann. d. Phys. 14. p. 384. 1904.

5) Schidlof u. A.-Klotz, Arch. de Genève (4) 27. p. 487. 1909.

daß das 25 mm lange eingeklemmte Stück des Stabes sehr merklich keilförmig war.) Da nun in die Berechnung von E die Länge mit der vierten, in diejenige von T mit der zweiten Potenz eingeht, so kann die Unsicherheit der Länge recht bedeutend zu kleine Werte für E und T vortäuschen.

Aus diesen Gründen erschien bei der theoretischen Bedeutung des Problems eine Wiederholung der Beobachtungen mit bestem Material nach der wohl unbestritten zuverlässigsten Methode angezeigt.

2. Es wurden die von W. Voigt¹⁾ konstruierten Apparate zur Messung der Biegung und Torsion von Stäbchen mit rechteckigem Querschnitt benutzt, welche die Fehler, die an den Enden der Stäbe gegenüber den theoretisch vorausgesetzten Bedingungen durch Eindrückung der Lagerschneiden bzw. durch Nachgeben der Klemmvorrichtungen auftreten, wohl so vollkommen als möglich vermeiden bzw. zu eliminieren gestatten.

Da bei den Beobachtungen der Biegung und Torsion die Dimensionen der benutzten Stäbchen sehr genau berücksichtigt werden müssen, wurde in der von W. Voigt²⁾ angegebenen Weise die Dicke und Breite an mehreren Stellen auf $1/1000$ mm genau gemessen und dann als Funktion der Länge durch je eine Gleichung zweiten Grades dargestellt, deren Konstanten nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet wurden. Für die Biegung kommen dann daraus für jede benutzte Länge zu berechnende Werte in Betracht, welche in der Tabelle Serie 1 unter (D) und (B) für die entsprechenden Längen L angeführt sind. Für die Torsion werden mittlere Dicken und Breiten benutzt.

Die Durchbiegung des auf zwei Schneiden ruhenden und in der Mitte belasteten Stabes wurde auf zwei Spiegel übertragen, deren gegenseitige Verdrehung ein Maß derselben bildete und in der Weise geeicht wurde, daß eine etwas größere Durchbiegung sowohl durch die Spiegelablesung als durch ein Meßmikroskop beobachtet wurde. Man hat ferner die Eindrückung (v) der Lagerschneiden und des Stäbchens zu berücksichtigen. Man eliminiert sie, indem man die Senkung (u)

1) Beschrieben z. B. Lehrb. d. Kristallphys. p. 782 und Pogg. Ann. Erg.-Bd. 7. p. 189. 1875.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 31. p. 475. 1887.

der Mitte bei derselben Belastung für verschiedene Schneidenabstände beobachtet und annimmt, daß die Eindrückung bei der Veränderung des Schneidenabstandes nicht geändert wird. Dies ist in Anbetracht des kleinen Wertes von v wohl gestattet. Die Eindrückung v hängt nach den Beobachtungen von W. Voigt nicht unbeträchtlich von dem Oberflächenzustand der Stäbchen (Reinigung) ab und variiert daher leicht etwas. Bei der Größe der gesamten Senkung u für die größeren der benutzten Längen hat aber die Unsicherheit von v geringen Einfluß auf das Endresultat.

Bei den ersten, weniger zuverlässigen Beobachtungen, die in der Tabelle unter Serie 1 wiedergegeben sind, wurden die Senkungen bei vier, bei den späteren Messungen von Serie 2 bei drei Längen beobachtet. Die Belastung betrug dabei $\Gamma = 100,5$ g. Aus den Beobachtungen wurde v und der Biegungsmodul $s = 1/E$ nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. In der Tabelle ist noch die wahre Durchbiegung ($u - v$) der Stäbchen aufgeführt.

Bei den Torsionsbeobachtungen wird die Unstarrheit der Befestigungen dadurch unschädlich gemacht, daß zwei Spiegel, deren gegenseitige Verdrehung mit Fernrohr und Skala gemessen wird, mit Schneiden auf dem Stäbchen selbst befestigt werden. Es wurde jedes Stäbchen mit den Gewichten $\Gamma = 41,3$; 100,5; 151,7 g, welche an dem Hebelarm 36,8 mm wirkten, torquiert. Der Torsionsmodul $s_2 = 1/T$ wurde aus den zusammengehörigen Beobachtungen mit kleinsten Quadraten berechnet. In der Tabelle sind die Gewichte mit a , b , c abgekürzt bezeichnet; unter φ ist ferner der beobachtete Drillungswinkel aufgeführt und in der untersten Reihe der aus den einzelnen Beobachtungen sich ergebende Wert für μ aufgeführt. Dabei ist die prozentische Genauigkeit für μ geringer und kein Maß der den Werten E und T für sich zukommenden Genauigkeit.

Da die Beobachtungen von Serie 2 zuverlässiger sind als diejenigen von Serie 1, so gebe ich ihnen das doppelte Gewicht und erhalte, jeden Wert mit einem der Anzahl der ihm zugrunde liegenden Beobachtungen entsprechenden Gewicht versehend, die Mittelwerte:

$$s = 14,04 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^2/\text{g}; \quad E = 7123 \text{ kg/mm}^2$$

$$s_2 = 31,80 \cdot \text{, , ,}; \quad T = 3145 \text{ , , ,}$$

Serie 1.

Stäbchen Nr.	1			2			3	4
	(D)	(B)	L	$(u-v)$	v	E		
L cm	1,3960	962	986	971	1,4081	082	083	085
(B) mm	6,0746	752	761	771	6,0824	827	831	835
L cm	2,0	4,0	6,0	7,6	2,0	4,0	6,0	7,6
$(u-v) \cdot 10^5$ cm	14,8	137,8	463,9	937,9	14,4	131,6	439,6	890,9
$v \cdot 10^8$ cm	8,1				9,2			
$s \cdot 10^{10}$ cm ² /g		14,12	7090			13,7		
E kg/mm ²						7810		
L cm	5,910	a	5,614		5,830	b	5,769	5,947
I'	b	49,92	19,53	72,28	47,91	a	b	b
φ Min.	31,53		31,80	31,80	31,33	19,67	47,75	77,26
$s_3 \cdot 10^{10}$ cm ² /g	3175		3150	3180	3180	31,68	31,36	31,90
T kg/mm ²						3160	3190	3230
μ		0,122			0,156		0,105	0,099

Serie 2.

Stäbchen Nr.	1			2			3	4
	(D)	(B)	L	$(u-v)$	v	E		
L cm	2,0	6,0	7,4	2,0	6,0	7,6	2,0	7,6
(B) mm	17,22	464,55	861,09	11,82	450,15	910,13	14,38	466,14
L cm	4,43			8,92			9,84	938,74
$s \cdot 10^{10}$ cm ² /g		14,02		14,06			14,04	16,39
E kg/mm ²		7181		7113			7119	458,98
L cm	5,917	a	5,997	a	b	c	5,393	5,598
I'	a	20,80	50,68	76,26	b	c	b	b
φ Min.		20,69	50,90	76,28	20,58	50,00	75,61	47,11
$s_3 \cdot 10^{10}$ cm ² /g		31,904	bzw. 31,989	31,897			31,620	31,987 bzw. 31,917
T kg/mm ²		3184	"	3181	8141		3163	3131 "
μ		0,138			0,132		0,126	0,140

Daraus folgen:

$$\mu = 0,133,$$

$$c = 7,423 \cdot 10^8 \text{ g/cm}^2,$$

$$c_1 = 1,134 \cdot \text{ „ „ „},$$

$$c/c_1 = 6,55.$$

Die Werte der Elastizitätskonstanten E und T sind beträchtlich größer als die meisten der von früheren Beobachtern gefundenen. Auf mögliche Ursachen der Abweichungen ist im Eingang hingewiesen worden, ohne daß damit behauptet werden sollte, daß sie die *einzigsten* möglichen sind, insbesondere dürfte vielleicht auch eine Verschiedenheit der Dichte, welche z. B. Schulze zu 2,22 angibt, mitspielen. Die Differenz gegenüber den Schulzeschen Zahlen ist so groß, daß die Unsicherheit der Einspannung allein zu ihrer Erklärung wohl nicht ausreichen dürfte. Bezüglich der Biegungsschwingungen wäre anzunehmen, daß der theoretisch feste Querschnitt um 3 mm innerhalb der Fassung gelegen hätte, bezüglich der Drillingsschwingungen aber um 10 mm. Ersteres ist vielleicht, letzteres kaum denkbar, wenngleich es sich nur um eine theoretische Äquivalenz handelt und die Verhältnisse nicht so einfach sind, daß man die Bedingungen für die Lage dieses „theoretisch festen“ Querschnittes ohne weiteres angeben könnte.

Bemerkung von W. Voigt.

Was die theoretische Verwertung der Resultate im Sinne der Bemerkungen des Eingangs angeht, so sind die Voraussetzungen der Rechnung: der lückenlose Aufbau des quasi-isotropen Mediums aus Kristallbrocken in regelloser Orientierung bei einer Größe der Brocken, die klein ist gegen die Dimensionen des Präparates, aber groß gegen die Wirkungssphäre der Molekularkräfte. In Fällen, wo die Lückenlosigkeit nicht zutrifft, wo etwa, wie häufig, die Brocken durch ein pulverartiges Bindemittel zusammengehalten werden, müssen die Elastizitätskonstanten c und c_1 , somit auch E und T bei dem quasiisotropen Medium *kleiner* ausfallen, als sich aus den Parametern des Kristalles berechnet. Bei geschmolzenem Quarz kommt dieser letztere Umstand nicht in Betracht. Dagegen ist

von vornherein nicht zu entscheiden, ob bei ihm eine quasi-isotrope Struktur überhaupt vorliegt, und wenn ja, ob die Größe der Kristallbrocken den obigen Annahmen entspricht.

Die Gegenüberstellung der aus den Daten für kristallisierten Quarz berechneten mit den aus den vorstehenden Beobachtungen folgenden Werten ergibt die folgende Zusammenstellung:

ber.	$E = 10200$	$T = 4760$	$\mu = 0,068$	$c = 10,27 \cdot 10^8$
beob.	$= 7123$	$= 3145$	$= 0,133$	$= 7,423 \cdot 10^8$
	$c_1 = 0,75 \cdot 10^8$	$c/c_1 = 13,7$		
	$= 1,134 \cdot 10^8$	$= 6,55$		

Diese Zusammenstellung zeigt, daß die Grundannahmen der Theorie der quasiisotropen Körper bei Quarzglas nicht zu treffen. Doch ist folgendes bemerkenswert:

Der berechnete Wert von c/c_1 übertrifft den beobachteten beträchtlich; immerhin ist der Betrag des letzteren gegenüber dem Poissonschen ($c/c_1 = 3$) sehr auffallend und man würde nach ihm vielleicht an eine (unvollkommene) Quasiisotropie mit sehr kleinen, d. h. die Wirkungssphäre nicht allzuviel übertreffenden Kristallbrocken denken können. Allerdings macht der stark verschiedene Wert der Dichtigkeit ($\varrho = 2,65$ für Bergkristall, $\varrho = 2,20$ für Quarzglas) etwas bedenklich gegen eine solche Auffassung. Denn wenn auch Kristallbrocken von wenig die Wirkungssphäre übertreffenden Dimensionen sich recht wohl, eben infolge der anderen Molekularwirkungen, zu einem Medium von anderer Dichte als der des homogenen Kristalles zusammenschließen können, so ist eine so große Differenz einigermaßen unwahrscheinlich.

Lehnt man die Hypothese der Quasiisotropie ab, so bleibt nur die Annahme *regellos* geordneter Moleküle (*eigentliche Isotropie*). Die Moleküle oder Elementarmassen können dabei natürlich von denen des kristallisierten Quarzes verschieden sein. Aber eine solche Annahme führt zu einem vom Poissonschen abweichenden c/c_1 nur¹⁾, wenn man die elastischen Verschiebungen nicht nach dem in der Theorie fester elastischer

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. 4. p. 187. 1901.

Körper gewöhnlich benutzten Schema, sondern zum Teil wie bei Flüssigkeiten verlaufend annimmt, dem Körper also eine partielle „Flüssigkeit“ beilegt. Es gibt Autoren, die alle glasartigen, d. h. alle eigentlich-isotropen Körper als Flüssigkeiten mit sehr großer innerer Reibung betrachten, und diese werden einer solchen Auffassung günstig sein. Da einer wirklichen Flüssigkeit ein Wert $c_1 = 0$, also $c/c_1 = \infty$ zukommt, so ist ein Wert $3 < c/c_1 < \infty$ mit der Hypothese partieller „Flüssigkeit“ verträglich. Freilich muß man nach dem großen Wert von c/c_1 , der sich für Quarzglas ergeben hat, diesem dann eine stärkere Flüssigkeit zugestehen, als gewöhnlichem Glas. Werte $c/c_1 < 3$, wie sie ein Teil der früheren Beobachtungen über Quarzglas liefern, würden mit eigentlicher Isotropie unvereinbar sein.

(Eingegangen 7. Februar 1913.)

**4. Über eine Form des Prinzips
der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik
des Relativitätsprinzips;
von E. Henschke.**

(Zweiter und dritter Teil der Berliner Dissertation des Verfassers).¹⁾

Erst mit der Aufstellung des modernen Relativitätsprinzips durch Einstein²⁾ war es gelungen, eine Theorie der Elektrodynamik bewegter Körper zu liefern, welche allen bisherigen Erfahrungen Genüge leistet. Aus den von Minkowski³⁾ mit Hilfe dieses Prinzips in eleganter Weise aufgestellten elektrodynamischen Grundgleichungen für bewegte Körper können alle Ergebnisse der Versuche von Eichenwald, Wilson und Michelson einwandfrei hergeleitet werden.

Allerdings konnte der Ansatz, den Minkowski für die ponderomotorische Kraft gegeben hatte, nach den Einwänden von Einstein und Laub⁴⁾ nicht aufrecht erhalten werden. Aber daß dies kein Mangel der Relativitätstheorie war, hat Abraham⁵⁾ in zwei Arbeiten gezeigt. Durch Aufstellung eines allgemeinen für alle erwähnten Theorien gültigen Ausdrucks für die ponderomotorische Kraft ist es Abraham gelungen, unter Hinzunahme der dem Relativitätsprinzip entsprechenden Verknüpfungsgleichungen zwischen den das elektromagnetische Feld bestimmenden Vektoren einen Ausdruck für die ponderomotorische Kraft herzuleiten, welcher allen bisherigen Erfahrungen entspricht.⁶⁾

1) Über den ersten Teil „Vierdimensionale Vektoranalysis“ vgl. die Dissert. Die hier zitierten Gleichungen dieses Teiles sind mit (I) bezeichnet.

2) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 891. 1905.

3) H. Minkowski, Göttinger Nachr. 1908. p. 53, separat erschienen bei Teubner, Leipzig.

4) A. Einstein u. S. Laub, Ann. d. Phys. 26. p. 541. 1908.

5) M. Abraham, Rendiconti del circolo matematico di Palermo, 28. p. 1; (I). 30. p. 83; (II).

6) Vgl. R. Gans, Physik. Zeitschr. 12. p. 806. 1911.

War somit durch die Minkowskischen Grundgleichungen und diesen Abrahamschen Ausdruck für die ponderomotorische Kraft eine Theorie der Elektrodynamik bewegter Körper aufgestellt worden, welche sowohl in der Einfachheit und Allgemeinheit der Voraussetzungen als auch in den tatsächlichen Erfolgen allen anderen Theorien weit überlegen war, so erschien es doch von erheblichen Interesse zu sein, eine Untersuchung darüber anzustellen, ob sich diese Theorie auch aus einem Variationsprinzip herleiten ließe.

Die hohe Bedeutung einer derartigen Herleitung der Theorie erhellt vor allem aus der Arbeit von Planck¹⁾ über die „Dynamik bewegter Systeme“, in welcher ausgeführt ist, daß das Prinzip der kleinsten Wirkung zusammen mit dem Relativitätsprinzip in allererster Linie als eine wirklich exakte Grundlage der Dynamik anzusehen ist.

Auch bei den früheren Theorien hatte man ja stets großen Wert auf eine Herleitung aus einem Variationsprinzip gelegt. So hatte H. A. Lorentz²⁾ seine Gleichungen aus einem mit dem D'Alembertschen verwandten Prinzip hergeleitet, und Helmholtz³⁾ war es ja bekanntlich gelungen, eine Form des Prinzips der kleinsten Wirkung anzugeben, aus welchem sich nicht nur die Hertzschen Grundgleichungen für bewegte Körper, sondern auch die Maxwell-Hertzschen Ausdrücke für die ponderomotorischen Kräfte ermitteln ließen.

In Anlehnung an diese Helmholtzsche Arbeit hat dann Schwarzschild⁴⁾ aus zwei Formen des Prinzips der kleinsten Wirkung einmal die Maxwell-Lorentzschen Grundgleichungen für das Vakuum dann aber auch den bekannten Lorentzschen Kraftansatz herleiten können.

Aus dem von Schwarzschild benutzten Integral haben dann später H. Poincaré⁵⁾ und M. Born⁶⁾ durch andere Methoden dieselben Resultate ermittelt.

1) M. Planck, Ann. d. Phys. **26**. p. 1. 1908.

2) H. A. Lorentz, „Versuch . . .“, Leiden 1895. Enzyklop. d. math. Wiss. V, 2, Art. 14, 1903.

3) H. v. Helmholtz, Wied. Ann. **47**. p. 1—26. 1892. Wiss. Abh. III. p. 476—504. Wiss. Abh. III. p. 597—608.

4) K. Schwarzschild, Göttinger Nachr. 1903. p. 126.

5) H. Poincaré, Rend. del circolo mat. di Palermo **21**. p. 129. 1906.

6) M. Born, Ann. d. Phys. **28**. p. 571. 1909.

Indessen ist in keiner dieser Arbeiten aus einem Variationsprinzip der Ausdruck für die ponderomotorische Kraft hergeleitet worden, welcher aus dem Maxwell'schen Spannungstensor und der elektromagnetischen Bewegungsgröße in der bekannten Weise zusammengesetzt ist. Da in diesem Ausdruck für die ponderomotorische Kraft der fundamentale Unterschied zwischen der Maxwell-Hertz'schen und den modernen Theorien der Elektrodynamik in unmittelbarster Weise in Erscheinung tritt, so erschien es wichtig, diesen Ausdruck aus einem Variationsprinzip herzuleiten.

In der vorliegenden Arbeit ist es nun für den Fall des Vakuums gelungen, Prinzipien aufzustellen, welche einerseits die elektrodynamischen Grundgleichungen einschließlich der Divergentsbedingungen liefern, andererseits die Ausdrücke für die ponderomotorischen Kräfte ergeben, welche außer der aus einem Spannungstensor abgeleiteten Kraft noch die elektromagnetische Trägheitskraft enthalten.

Die eingeschlagene Methode bringt es mit sich, daß zu den Ausdrücken für die ponderomotorischen Kräfte auch immer noch Gleichungen für die Energieverhältnisse sich ergeben.

Das zur Anwendung gebrachte Prinzip ist als eine Verallgemeinerung des Hamilton'schen Prinzips der kleinsten Wirkung anzusehen, welche von dem Gedanken ausgehend vorgenommen worden ist, daß die Bevorzugung der Zeit, welche in der klassischen Form des Hamilton'schen Prinzips vorhanden ist, sich eliminieren lassen muß gemäß dem Relativitätsprinzip, welches ja bekanntlich eine Gleichberechtigung von Raum und Zeit in mathematischer Beziehung verlangt.

Um diese Gleichberechtigung von Raum und Zeit bei jedem Schritt unmittelbar in Evidenz zu setzen, empfahl es sich, bei der Aufstellung des Prinzips vierdimensionale Betrachtungen anzustellen und als Methode die vierdimensionale Vektoranalysis zu verwenden. Freilich bedurften die bisherigen Ansätze einer Vektoranalysis im vierdimensionalen Raum erst erheblicher Erweiterungen, ehe ein erfolgreiches Operieren mit dieser Methode möglich war.

Im ersten Teil der Arbeit ist deshalb ein umfangreiches,

auf den Lewisschen¹⁾ Ansätzen basierendes System der vierdimensionalen Vektoranalysis entwickelt worden. Die dabei angestellten Betrachtungen erwiesen sich später für die verwickelten Rechnungen im zweiten und dritten Teil als äußerst bequem.

Es erschien angebracht den Fall des Vakuums getrennt von dem allgemeinen Fall zu behandeln, wie dies im zweiten Teil der Arbeit geschehen ist. Hierdurch ergab sich nicht nur eine bessere Übersicht über das Wesen der Prinzipien und der Methode, sondern es wurden auch verwickelte Rechnungen vermieden, wie sie sonst für den Fall der ponderablen Körper anzustellen gewesen wären. Es wurden bei der Formulierung des Prinzips vierdimensionale Betrachtungen angestellt, welche den von Minkowski gemachten ähnlich sind. Planck hat in der zitierten Arbeit gezeigt, daß das von ihm „Wirkungsgröße“ benannte Zeitintegral über das Helmholtzsche kinetische Potential eine Invariante gegenüber Lorentztransformationen ist. Damit gleichbedeutend ist die Aussage, daß die Wirkungsgröße im vierdimensionalen Raum ein Skalar ist.

Das aufgestellte Prinzip geht nun von einer Lokalisierung der Wirkungsgröße im vierdimensionalen Raum aus und betrachtet die Änderung der in einem vierdimensionalen Bereich enthaltenen Wirkungsgröße, welche stattfindet, falls den Punkten dieses Bereiches eine von Ort zu Ort stetig variiierende Verschiebung zuerteilt wird. Die für den Fall des Vakuums angesetzte Wirkungsgröße ist mit dem von Schwarzschild benutzten Integral identisch.

Bei der Verschiebung werden äußere Einwirkungen sowohl auf die vierdimensionalen als auch auf die dreidimensionalen Elementargebiete des betrachteten vierdimensionalen Bereiches zugelassen. Diese äußeren Einwirkungen bestehen einerseits aus der von den ponderomotorischen Kräften bei der Verschiebung der Raumkoordinaten geleisteten Arbeit, welche ja auch in dem Hamiltonschen Prinzip eine Rolle spielt. Dann aber tritt hier zu den äußeren Einwirkungen immer noch ein Glied hinzu, welches gleich dem Produkt ist aus der Variation der zeitlichen Koordinate und der zeitlichen Komponente der

1) G. N. Lewis, Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik. 7. p. 321 bis 347. 1910.

jenigen Viererkraft, welche als räumliche Komponenten die äußere ponderomotorische Kraft besitzt. Diese zeitliche Komponente der Viererkraft ist im allgemeinen Falle bis auf konstante Faktoren gleich der Summe aus der pro Zeiteinheit geleisteten Arbeit und der entwickelten Wärme.

Die bei der Verschiebung der Punkte des betrachteten Bereiches eintretenden lokalen Variationen der Vektoren werden durch dem Relativitätsprinzip entsprechende Verallgemeinerungen der Helmholtzschen Festsetzungen gewonnen. Wird die zeitliche Komponente der Verschiebung gleich Null gesetzt, so gehen die benutzten Variationen der Vektoren in die von Helmholtz angewandten über. Auch wird das aufgestellte Prinzip in diesem Fall mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung identisch.

Aber gerade durch die vorgenommene Verallgemeinerung kommt in den Ausdruck für die ponderomotorische Kraft das wichtige Glied, die elektromagnetische Trägheitskraft, hinein.

Die Grundgleichungen für das Vakuum und die Divergenzbedingungen werden unabhängig von der betrachteten Koordinatenverschiebung durch Variation des elektromagnetischen Vektorpotentials bzw. des skalaren elektromagnetischen Potentials abgeleitet.

Es wird in diesem Teil weiter das von Schwarzschild¹⁾ aufgestellte und auch von Born²⁾ benutzte Prinzip nach der eingeschlagenen Methode behandelt, wobei sich die in diesen Arbeiten erhaltenen Resultate ergeben.

Aus den Oberflächenintegralen ergibt sich ein Ausdruck für den Druck der Strahlung auf bewegte Flächen und eine Gleichung, welche die Arbeit des Strahlungsdrucks und die entwickelte Wärme bestimmt.

Im dritten Teil der Arbeit wird nun versucht, die für das Vakuum erhaltenen Resultate auf den Fall der ponderablen Körper auszudehnen. Es wird dabei als Wirkungsgröße ein in naheliegendster und dem Relativitätsprinzip entsprechender Weise aus der für das Vakuum benutzten Wirkungsgröße verallgemeinerter Ausdruck angenommen und untersucht, zu welchen Resultaten diese Wirkungsgröße führt.

1) K. Schwarzschild, l. c.

2) M. Born, l. c.

Die Minkowskischen Grundgleichungen für ponderable Körper ergeben sich ohne große Schwierigkeiten. Dagegen aber kann der Ausdruck, der mit dieser Form der Wirkungsgröße für die ponderomotorische Kraft aus dem dynamischen Prinzip hervorgeht, nicht aufrecht erhalten werden, da er zu Folgerungen führt, welche unseren Erfahrungen im Falle ruhender ponderabler Körper widersprechen. Es gelingt zwar, wie weiter gezeigt wird, durch Aufnahme eines neuen Gliedes in das dynamische Prinzip einen Ausdruck herzuleiten, welcher mit dem Abrahamschen Kraftausdruck identisch ist. Indessen kann dieses abgeänderte Prinzip nicht recht befriedigen, da man von einer bestimmten Wirkungsgröße nicht mehr sprechen kann.

Es bleibt die Frage offen, ob der Grund für diese Unstimmigkeit in einer unzureichenden Verallgemeinerung der für das Vakuum benutzten Wirkungsgröße zu suchen ist, oder etwa darin, daß es nicht zulässig ist, in dem dynamischen Prinzip die Dielektrizitätskonstante und die magnetische Permeabilität als konstante Größen anzusehen, daß bei diesen Größen vielmehr darauf Rücksicht genommen werden muß, daß sie doch im Sinne der Elektronentheorie nur als Mittelwerte zu betrachten sind.¹⁾

Als Maßsystem für die elektromagnetischen Größen ist das Heaviside-Lorentzsche²⁾ verwandt worden.

Zweiter Teil.

Die Elektrodynamik des Vakuums.

§ 1. Die Wirkungsgröße.

Es soll im folgenden die Bewegung der Elektrizität betrachtet werden wie das Strömen eines kontinuierlichen Mediums von der Raumdichte ρ , dessen Geschwindigkeitszustand angegeben wird durch den dreidimensionalen Vektor v . Von atomistischen Vorstellungen der Ladung soll vollständig abgesehen werden.

1) Auf diese Möglichkeit hat mich Hr. Geh.-Rat Planck freundlichst aufmerksam gemacht.

2) H. A. Lorentz, l. c.

Die Raumdichte ϱ und den Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} vereinigen wir mit der Lichtgeschwindigkeit c zu dem Vektor dritter Art P mit den Komponenten

$$(1) \quad P_{yuz} = \frac{\varrho v_x}{c}, \quad P_{zux} = \frac{\varrho v_y}{c}, \quad P_{uyz} = \frac{\varrho v_z}{c}, \quad P_{xyz} = i \varrho. \text{¹⁾}$$

Diesen Vektor dritter Art können wir durch den Vektor erster Art P^* und den Einheitspseudoskalar k_{xyzu} gemäß der Gleichung (I, 36) ersetzen, so daß wir haben

$$P = P^* k_{xyzu}$$

und

$$(1a) \quad \begin{cases} P_x^* = P_{yuz} = \frac{\varrho v_x}{c}, & P_y^* = \frac{\varrho v_y}{c}, \\ P_z^* = \frac{\varrho v_z}{c}, & P_u^* = i \varrho. \end{cases}$$

Der Zustand des elektromagnetischen Feldes sei durch den Vektor zweiter Art \mathfrak{M} angegeben. Wie bei M. Laue²⁾ seien die Komponenten von \mathfrak{M} :

$$(2) \quad \begin{cases} M_{yz} = \mathfrak{H}_x, & M_{zx} = \mathfrak{H}_y, & M_{xy} = \mathfrak{H}_z, \\ M_{zu} = -i \mathfrak{E}_x, & M_{yu} = -i \mathfrak{E}_y, & M_{zu} = -i \mathfrak{E}_z, \end{cases}$$

wofür auch kurz geschrieben werde

$$(2a) \quad \mathfrak{M} = (\mathfrak{H}, -i \mathfrak{E}).$$

Mit Born fassen wir das elektromagnetische Vektorpotential \mathfrak{A} und das skalare elektromagnetische Potential φ zusammen zu dem Vektor

$$(3) \quad \Phi = \Phi_x k_x + \Phi_y k_y + \Phi_z k_z + \Phi_u k_u,$$

indem wir setzen

$$(3a) \quad \Phi_x = \mathfrak{A}_x, \quad \Phi_y = \mathfrak{A}_y, \quad \Phi_z = \mathfrak{A}_z, \quad \Phi_u = i \varphi.$$

1) Wenn die Integralform der Maxwellschen Gleichungen (96 a) wie von Sommerfeld (Ann. d. Phys. 33. p. 658 (24a). 1910) angegeben, in unserer Schreibweise nach (74 a) lautend

$$\int \int^* d\sigma = \int \int S P dS,$$

beibehalten bleibt, muß P , da dS ein Vektor dritter Art ist und auf der linken Seite ein Skalar steht, als ein Vektor dritter Art angesehen werden.

2) M. Laue, „Das Relativitätsprinzip“ 1911. p. 78.

Alle diese angeführten Größen haben an jedem Ort und zu jeder Zeit bestimmte Werte.

Wenn wir also in unserem oben betrachteten vierdimensionalen Raum die Koordinaten x, y, z mit den Cartesischen Koordinaten des gewöhnlichen Raumes identifizieren und die vierte Koordinate in der Weise

$$(4) \quad u = i c t$$

mit der Zeit t , der Lichtgeschwindigkeit c und der Einheit des Imaginären i in Beziehung setzen, so können wir sagen, daß in jedem Punkt x, y, z, u unseres vierdimensionalen Raumes die eben definierten Größen bestimmte Werte haben.

Nach diesen Bemerkungen hat dann das Integral

$$(5) \quad W = \int_{\Sigma} d\Sigma \left(-\frac{1}{2} (\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}^*) + (P \times \Phi) \right)$$

erstreckt über einen beliebigen, im vierdimensionalen Raum festliegenden Bereich Σ , wohldefinierten Sinn.

Dieses Integral, das wir als die im Bereich Σ enthaltene Wirkungsgröße¹⁾ bezeichnen, legen wir unseren Betrachtungen zugrunde.

Aus der mit (5) gleichwertigen Form der Wirkungsgröße

$$(5') \quad W = \int_{\Sigma} dx dy dz du \left(-\frac{1}{2} \mathfrak{M}^2 + P^* \Phi \right)$$

erkennen wir, daß W im vierdimensionalen Raum ein gewöhnlicher Skalar ist, und daher invariant gegen Drehungen des Koordinatensystems x, y, z, u , d. h. gegen Lorentztransformationen ist. Diese Bedingung muß nach Planck¹⁾ für die Wirkungsgröße erfüllt sein.

Da gemäß der Definitionen von \mathfrak{M} , P^* und Φ gilt

$$(6) \quad \mathfrak{M}^2 = \mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2,$$

$$(7) \quad P^* \Phi = \frac{\varrho v_x}{c} \mathfrak{A}_x + \frac{\varrho v_y}{c} \mathfrak{A}_y + \frac{\varrho v_z}{c} \mathfrak{A}_z - \varrho \varphi,$$

so erkennt man leicht die Übereinstimmung unseres Ausdrucks mit dem von Schwarzschild²⁾ und Born³⁾ benutzten Integralen, nur daß wir hier das entgegengesetzte Vorzeichen haben.

1) M. Planck, l. c.

2) K. Schwarzschild, l. c.

3) M. Born, l. c.

§ 2. Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge im Vakuum.

Die beiden Vektoren \mathfrak{M} und Φ setzen wir miteinander in Beziehung durch die Vektorgleichung

$$(8) \quad \mathfrak{M} = \diamond \times \Phi,$$

welche in der Schreibweise der gewöhnlichen Vektoranalysis lautet

$$(8a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{H} = \operatorname{curl} \mathfrak{A} \\ \mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}. \end{array} \right.$$

Dieser Ansatz für \mathfrak{M} ermöglicht eine Ersetzung von \mathfrak{M} durch Φ in dem Ausdruck für die Wirkungsgröße.

Nunmehr stellen wir folgendes Prinzip auf:

Es soll die erste Variation der Wirkungsgröße

$$(9) \quad W = \int_{\Sigma} dx dy dz du \left\{ -\frac{1}{2} (\diamond \times \Phi)^2 + P^* \Phi \right\}$$

des Bereiches Σ verschwinden.

Der Vektor P soll dabei als eine im Bereich Σ bekannte Funktion von x, y, z, u angesehen werden.

Die Komponenten von Φ sind dagegen die gesuchten Funktionen von x, y, z, u , welche W zu einem Extremum machen sollen.

Führen wir nun die Variationen aus, so erhalten wir, wenn wir nur die Glieder, welche $\delta \Phi_x$ enthalten, ausführlich hinschreiben

$$\begin{aligned} \delta W = & - \int dx dy dz du \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial y} \right) \left(-\frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial y} \right) \right. \\ & + \left(\frac{\partial \Phi_z}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial z} \right) \\ & + \left. \left(\frac{\partial \Phi_u}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial u} \right) \left(-\frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial u} \right) - P_x^* \delta \Phi_x \right\} \\ & + ((\delta \Phi_y)) + ((\delta \Phi_z)) + ((\delta \Phi_u)) \\ = & - \int dx dy dz du \left\{ - M_{xy} \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial y} - M_{xz} \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial z} \right. \\ & - M_{xu} \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial u} - P_x^* \delta \Phi_x \left. \right\} \\ & + ((\delta \Phi_y)) + \dots \end{aligned}$$

Nach dem vierdimensionalen Analogon zur Greenschen Umformung eines Raumintegrals können wir dafür schreiben:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta W = - \int_{\Sigma} dx dy dz du \left(\delta \Phi_x \left\{ \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial M_{zu}}{\partial u} - P_x^* \right\} \right. \\ \quad \left. + \delta \Phi_y \left\{ \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial M_{yu}}{\partial u} - P_y^* \right\} \right. \\ \quad \left. + \dots \right) \\ \quad + \int_S dS (\delta \Phi_x \{ M_{xy} \cos ny + M_{xz} \cos nz + M_{zu} \cos nu \} \\ \quad + \delta \Phi_y \{ M_{yx} \cos nx + M_{yz} \cos nz + M_{yu} \cos nu \} \\ \quad + \dots), \end{array} \right.$$

wo S die dreidimensionale Begrenzung unseres Bereiches bedeutet und n die eindeutig bestimmte nach außen gerichtete Normale des Elements dS der Oberfläche ist.

Behandeln wir die Größen $\delta \Phi_x$, $\delta \Phi_y$, $\delta \Phi_z$, $\delta \Phi_u$ als voneinander unabhängig, wie das Schwarzschild und Born tun, so erhalten wir aus dem über den Bereich Σ erstreckten Raumintegral die Gleichungen

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial M_{zu}}{\partial u} = P_x^*, \\ \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial M_{yu}}{\partial u} = P_y^*, \\ \frac{\partial M_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{zu}}{\partial u} = P_z^*, \\ \frac{\partial M_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_{uz}}{\partial u} = P_u^*, \end{array} \right.$$

wofür wir auch kurz schreiben können

$$(11a) \quad \diamond \quad \mathfrak{M} = P^*.$$

Die Gleichungen (11) sind nun in der Tat die Grundgleichungen für die elektrodynamischen Wirkungen bewegter Elektronen im Vakuum in der Minkowskischen symmetrischen Bezeichnungsweise.

Der Bedeutung von \mathfrak{M} und P gemäß sind diese identisch mit den in gewöhnlicher Weise geschriebenen Gleichungen

$$(11b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{curl } \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{\varrho \mathfrak{v}}{c}, \\ \text{div } \mathfrak{E} = \varrho. \end{array} \right.$$

Das andere System von Grundgleichungen ergibt sich bereits aus dem Ansatz

$$(8) \quad \mathfrak{M} = \diamond \times \Phi.$$

Da nämlich für jeden Vektor erster Art a nach (I, 60)

$$(I, 60) \quad \diamond \times (\diamond \times a) = 0$$

gilt, so folgt

$$(12) \quad \diamond \times \mathfrak{M} = 0$$

oder in Komponenten geschrieben nach (50).

$$(12 \text{ a}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M_{uz}}{\partial y} + \frac{\partial M_{uy}}{\partial z} + \frac{\partial M_{uy}}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial M_{uz}}{\partial x} + \frac{\partial M_{ux}}{\partial z} + \frac{\partial M_{xz}}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial M_{uy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial M_{yz}}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial M_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial z} = 0, \end{array} \right.$$

welche Gleichungen der Bedeutung von \mathfrak{M} nach mit dem zweiten System Maxwell-Lorentzscher Grundgleichungen

$$(12 \text{ b}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -c \operatorname{curl} \mathfrak{E} \\ \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0 \end{array} \right.$$

identisch sind.

Die ermittelten Gleichungen genügen, um \mathfrak{E} und \mathfrak{H} zu bestimmen.

Die bekannten Differentialgleichungen für die elektromagnetischen Potentiale ergeben sich aus den oben erhaltenen Gleichungen (11) vermittelst der aus (I, 38) für $a = b = \diamond$, $c = \Phi$ hergeleiteten Gleichung

$$\diamond (\diamond \times \Phi) = \diamond (\diamond \Phi) - \diamond^2 \Phi, \quad (13)$$

falls noch die Bedingung

$$(13 \text{ a}) \quad \diamond \Phi = 0$$

oder anders geschrieben

$$(13) \quad \operatorname{div} \mathfrak{M} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

hinzugenommen wird. Diese Gleichung wird ja auch in der gewöhnlichen Theorie für die Ableitung der Potentialdifferentialgleichungen angenommen.¹⁾

1) Vgl. M. Abraham, Theorie d. Elektr. II. p. 37.

In der Tat ergibt die obige Gleichung bei Annahme von (13 a) und Beachtung von

$$(11 \text{ a}) \quad \diamond (\diamond \times \Phi) = \diamond \mathfrak{M} = P^*$$

die Beziehung

$$(14) \quad \diamond^2 \Phi = - P^*.$$

Diese Gleichung ist, weil

$$\diamond^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2}$$

identisch mit den Differentialgleichungen für die retardierten Potentiale.¹⁾

Nimmt man die Bedingung

$$(13 \text{ a}) \quad \diamond \Phi = 0$$

von vornherein mit in das Prinzip auf, so erhält man aus dem sich dann ergebenden isoperimetrischen Variationsproblem unmittelbar die Differentialgleichung (17) für die Potentiale.¹⁾

Die Grundgleichungen (11) sind im übrigen nichts anderes als die Eulerschen Differentialgleichungen des gewöhnlichen Variationsproblems in vier Variablen, welches unserem Prinzip zugrunde liegt.

§ 3. Die Gleichungen für die Begrenzung.

Schwarzschild und Born verlangen in ihren Prinzipien, daß die Variationen von Φ an der Begrenzung der Integrationsbereiche verschwinden.

In unserem Prinzip ist diese einschränkende Bedingung aufgehoben. Wir müssen daher das Integral über die Begrenzung in (10) für sich gleich Null setzen und erhalten so die Gleichung

$$(15) \quad (\mathbf{n} \mathfrak{M}) = 0,$$

wobei \mathbf{n} der Vektor erster Art von der Richtung der Normale²⁾ des Oberflächenelements und der Einheit der Länge ist. Seine Komponenten sind daher die cos der Winkel zwischen der Normalen und den Koordinatenachsen.

Die Bedingung (15) können wir auf eine von Herglotz angegebene Weise leicht in die gewöhnliche Ausdrucksweise übersetzen.

1) Vgl. Zemplén, Math. Ann. 62, p. 568—581. 1906.

2) Es ist stets die nach außen gerichtete Normale gemeint.

Es sei im gewöhnlichen Raum

$$(16) \quad \psi(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

die Begrenzung des Vakuums, in welchem die elektromagnetischen Vorgänge stattfinden. ξ, η, ζ seien hierbei die Koordinaten der Teilchen der Begrenzung zu irgend einer Zeit t_0 . Die Koordinaten derselben Teilchen zu der Zeit t , welche x, y, z sein mögen, sind dann gewisse Funktionen von ξ, η, ζ . Umgekehrt werden dann auch ξ, η, ζ Funktionen von x, y, z, u sein, so daß wir schreiben können:

$$(16a) \quad \psi(\xi, \eta, \zeta) = f(x, y, z, u).$$

Falls nun ν die Normale der Begrenzung ist, und v_ν die Komponente der Geschwindigkeit eines Teilchens derselben nach dieser Normalen bedeutet, gilt die Beziehung¹⁾

$$(17) \quad \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z} : \frac{\partial f}{\partial u} = \cos \nu x : \cos \nu y : \cos \nu z : \frac{i v_\nu}{c}.$$

Wenn wir nunmehr annehmen, daß unser Bereich Σ von der Fläche

$$f(x, y, z, u) = 0$$

eingeschlossen wird, so haben wir

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} n_x : n_y : n_z : n_u = \cos \nu x : \cos \nu y : \cos \nu z : \frac{i v_\nu}{c} \\ \qquad \qquad \qquad = v_x : v_y : v_z : \frac{i v_\nu}{c}. \end{array} \right.$$

Infolge dieser Beziehung können wir die Gleichung

$$(15) \quad (n \mathfrak{M}) = 0$$

ersetzen durch die folgenden:

$$(15a) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\mathfrak{H} \nu] = \frac{v_\nu}{c} \mathfrak{E} \\ \mathfrak{E}_\nu = 0. \end{array} \right.$$

Die letzte dieser Gleichungen ist, wie unmittelbar zu sehen, eine Folge der vorhergehenden.

Falls die Fläche

$$f(x, y, z, u) = 0$$

nicht die Begrenzung des Bereichs ist, in welchem wir nur elektromagnetische Vorgänge annehmen, sondern nur eine Un-

1) G. Herglotz, Ann. d. Phys. 36. p. 509. 1911.

stetigkeitsfläche der das Feld bestimmenden Größen ist, so ergibt die Anwendung unseres Prinzips auf einen Bereich Σ' , welcher die Fläche $f = 0$ einschließt, für $f \geq 0$ die Gültigkeit der Grundgleichungen (11), (12), für die Fläche $f = 0$ selber aber die sogenannten „Kompatibilitätsbedingungen“. Diese sind mit den obigen Bedingungen gleichlautend, nur müssen statt der Vektoren die Sprünge derselben an der Fläche $f = 0$ gesetzt werden.¹⁾

§ 4. Das dynamische Prinzip.

Wir haben oben in einem Prinzip die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge im Vakuum dadurch ermittelt, daß wir mit dem Vektor Φ , welcher das elektromagnetische Feld bestimmt, Variationen vorgenommen haben.

Wenn wir nun etwas über die ponderomotorischen Kräfte erfahren wollen, so müssen wir, da diese ja doch nur bei Änderungen von Bewegungszuständen in Erscheinung treten, Variationen der Vektoren in Betracht ziehen, die mit einer Änderung des Bewegungszustandes der Elektronen zusammenhängen.

Die Lage und der Bewegungszustand eines Punktes ist nun nach Minkowski²⁾ für alle Zeiten bestimmt durch Angabe der Weltlinie des Punktes im vierdimensionalen Raum. Wir werden demgemäß Variationen der Vektoren zu betrachten haben, welche mit einer Verschiebung der Weltlinien Zusammenhang haben.

Ähnlich wie Minkowski³⁾ denken wir uns die Weltlinien bestehend aus substantiellen Punkten und erteilen nun den Punkten unseres Bereichs Σ , der ja überall dicht von Weltlinien durchsetzt wird, und auch denen seiner Begrenzung δ eine unendlich kleine von Punkt zu Punkt stetig variierende Verschiebung, die wir durch den Vektor δq angeben wollen.

Hierdurch werden die Vektoren an jeder Stelle des Be-

1) Vgl. G. Zemplén, l. c. — L. Silberstein, Ann. d. Phys. 26 p. 751. 1908; 31. p. 436. 1910. — A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 31. p. 443. 1910.

2) H. Minkowski, „Raum und Zeit“, Leipzig, B. G. Teubner.

3) H. Minkowski, l. c. p. 49.

reichs gewisse Änderungen erfahren. Die Wirkungsgröße erleide dabei die Änderung

$$\delta W = \delta \int_{\Sigma} dx dy dz du \{-\frac{1}{2} \mathfrak{M}^2 + P^* \Phi\}.$$

Wir wollen in unserem Prinzip auch äußere Wirkungen in Betracht ziehen und denken uns auf jeden inneren Punkt unseres Bereichs die Viererkraft \mathfrak{F}^1 wirkend. Bei der Verschiebung wird von dieser Kraft, im übertragenen Sinne, die Arbeit

$$\int_{\Sigma} dx dy dz du \mathfrak{F} \delta q = \int_{\Sigma} dx dy dz du \{F_x \delta q_x + F_y \delta q_y + F_z \delta q_z + F_u \delta q_u\}$$

geleistet. Diesen Ausdruck fügen wir zu δW hinzu.

Dem Umstände entsprechend, daß wir auch den Punkten der Oberfläche Verschiebungen erteilen, fügen wir ein diesem Ausdruck für die Arbeit der Viererkraft entsprechendes Oberflächenintegral

$$\int_{\mathfrak{S}} dS \mathfrak{P} \delta q = \int_{\mathfrak{S}} dS \{\mathfrak{P}_x \delta q_x + \mathfrak{P}_y \delta q_y + \mathfrak{P}_z \delta q_z + \mathfrak{P}_u \delta q_u\}$$

hinzu. Hierbei ist \mathfrak{P} die von außen auf die Flächeneinheit der Oberfläche S wirkende Kraft.

Schließlich muß noch ein Glied hinzugefügt werden, welches dem Umstände Rechnung trägt, daß durch die Verschiebung der Oberfläche Wirkungsgröße in den Raum Σ eintritt, nämlich

$$\int_{\mathfrak{S}} dS \{n(-\frac{1}{2} \mathfrak{M}^2 + P^* \Phi) \delta q\}.$$

Unser Prinzip verlangt nun die Gültigkeit der Gleichung

$$(19) \quad \left\{ \delta \int_{\Sigma} dx dy dz du \{-\frac{1}{2} \mathfrak{M}^2 + P^* \Phi\} + \int_{\Sigma} dx dy dz du \mathfrak{F} \delta q + \int_{\mathfrak{S}} dS \mathfrak{P} \delta q + \int_{\mathfrak{S}} dS \{n(-\frac{1}{2} \mathfrak{M}^2 + P^* \Phi) \delta q\} \right\} = 0.$$

1) A. Sommerfeld, l. c. p. 770; M. Laue, l. c. p. 79.

Die enge Beziehung zum gewöhnlichen Hamiltonschen Prinzip ist erkennbar. Wir haben aber hier völlige Symmetrie zwischen den Raum- und Zeitkoordinaten, während beim Hamiltonschen Prinzip die Zeitkoordinate eine bevorzugte Rolle spielt.

§ 5. Die Variationen der Vektoren.

Die Ermittlung der Variationen der Vektoren nehmen wir in einer der Helmholtzschen analogen Weise vor. Wir wollen nämlich annehmen, daß bei der Verschiebung der Punkte unseres Bereichs und seiner Begrenzung die substantiellen Änderungen der Ausdrücke

Φds , $\mathfrak{M} d\sigma$, $P dS$
verschwinden.

Die substantiellen Änderungen dieser Vektorprodukte haben wir in den Kapiteln über die Vektoranalysis nun ganz allgemein für eine Verrückung der Elemente ds , $d\sigma$, dS ermittelt.

Nach (I, 82) haben wir für die substantielle Änderung von $P dS$

$$\delta(P dS) = dS \{ \delta_0 P - \delta q (\diamond \times P) + \diamond \times (P \delta q) \}.$$

Die Bedingung
(20) $\delta(P dS) = 0$

liefert daher für die lokale Änderung von P

$$(21) \quad \delta_0 P = \delta q (\diamond \times P) - \diamond \times (P \delta q).$$

Da nach dem Gaußschen Satze für einen geschlossenen Raum

$$\int\limits_{\tilde{S}} P dS = \int\limits_{\Sigma} d\Sigma (\diamond \times P)^1)$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} \frac{\varrho \mathbf{v}}{c} = 0$$

geschrieben werden kann:

$$\diamond \times P = 0.$$

1) Vgl. I. Teil der Diss.

so erkennt man, daß wir durch unsere Forderung

$$\delta(P d \mathcal{S}) = 0$$

den Satz von der Erhaltung der Elektrizität für unsere Variation als gültig annehmen.

Die auf diesem Wege ermittelte lokale Variation von P stimmt übrigens genau mit der von Minkowski-Born¹⁾ auf gänzlich verschiedenem Wege aufgefundenen überein. Man setze nur in der Formel (11) der unten zitierten Arbeit $\delta q_x \delta q_y \dots \delta q_u$ statt $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{u}$, δ_0 statt δ , dann erkennt man auf Grund unserer Bezeichnungen die genaue Übereinstimmung.

Ganz entsprechend ermitteln wir die lokale Variation von \mathfrak{M} , indem wir analog der Helmholtzschen Festsetzung verlangen:

$$(22) \quad \delta(\mathfrak{M}^* d \sigma) = 0,$$

oder ausgeschrieben:

$$\delta(\mathfrak{E}_x dy dz + \mathfrak{E}_y dz dx + \mathfrak{E}_z dx dy - c dt(\mathfrak{H}_x dx + \mathfrak{H}_y dy + \mathfrak{H}_z dz)) = 0.$$

Wir erhalten so nach (I, 79) für die lokale Variation von \mathfrak{M} :

$$(23) \quad \delta_0 \mathfrak{M}^* = -\delta q(\diamond \times \mathfrak{M}^*) + \diamond \times (\mathfrak{M}^* \delta q).$$

Ebenfalls in der vierdimensionalen Analogie zu der Helmholtzschen Festsetzung über das Vektorpotential²⁾ verlangen wir

$$(24) \quad \delta(\Phi ds) = 0,$$

und erhalten nach (I, 77) für die lokale Variation von Φ

$$(25) \quad \delta_0 \Phi = \delta q(\diamond \times \Phi) - \diamond(\Phi \delta q).$$

Der wesentliche Unterschied zwischen diesen Variationen und den von Helmholtz benutzten besteht darin, daß wir hier eine Verschiebung im vierdimensionalen Raum vorgenommen haben.

Die Glieder, welche durch die Variation der zeitlichen Komponente der Verschiebung zu dem Ausdruck für die pon-

1) Minkowski-Born, Die Grundgleichungen vom Standpunkte der Elektronentheorie; als Sonderabdruck erschienen bei B. G. Teubner, Leipzig, p. 69.

2) Vgl. H. Helmholtz, l. c.

deromotorische Kraft hinzukommen, sind aber gerade diejenigen, welche den Maxwell-Hertzschen Kraftausdruck zu dem Lorentzschen ergänzen.

Dies zeigt sich, wenn wir jetzt einmal überall die Variation der zeitlichen Komponente der Verschiebung gleich Null setzen. Wir erhalten dann, wenn wir für den Augenblick unter δq den dreidimensionalen Vektor mit den Komponenten δq_x , δq_y , δq_z verstehen, nach (23) aus den ersten drei Komponenten von $\delta_0 \mathfrak{M}^*$

$$\delta_0 \mathfrak{E} = -\delta q \operatorname{div} \mathfrak{E} + \operatorname{curl} [\delta q \mathfrak{E}].$$

Diese Variation der elektrischen Feldstärke stimmt genau mit der von Helmholtz angegebenen überein.

Aus den drei letzten Komponenten von $\delta_0 \mathfrak{M}^*$ bekommen wir für die Variation der magnetischen Feldstärke \mathfrak{H}

$$\delta_0 \mathfrak{H} = -\operatorname{grad}(\delta q \mathfrak{H}) + [\delta q, \operatorname{curl} \mathfrak{H}].$$

Schwarzschild hat in seinem dynamischen Prinzip, welches wir mit verändertem Vorzeichen schreiben wollen:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int dx dy dz \{ \delta_0 \frac{1}{2} (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{H}^2) + \frac{\varrho v}{c} \mathfrak{A} - \varrho \varphi + \mathfrak{R} \delta q \} = 0,$$

nur ϱ und v variiert, \mathfrak{E} und \mathfrak{H} dagegen unvariiert gelassen. Durch seine spezielle Variation erhält er genau den Lorentzschen Kraftansatz

$$\varrho \left(\mathfrak{E} + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{H} \right] \right).$$

Gegen diese spezielle Wahl der Variation lässt sich nichts einwenden, da ja die festen Bedingungen durchaus willkürlich beschränkt werden können. Wenn man jedoch den ersten Teil $\frac{1}{2} (\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{H}^2)$ auch variiert, wie das Helmholtz ebenfalls getan hat, so erhält man, wie durch Einsetzen von $\delta_0 \mathfrak{E}$ und $\delta_0 \mathfrak{H}$, und Vornahme der nötigen partiellen Integrationen zu erkennen ist, als Koeffizient von δq_x :

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} (\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2 + \mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_z^2) \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y + \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_z + \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_z) \end{aligned}$$

und entsprechende Ausdrücke für die anderen Komponenten.

Wir bekommen daher durch die vorgenommene Spezialisierung unserer allgemeinen Variationen die Maxwell-Hertz-sche Darstellung der ponderomotorischen Kraft.

Dieser Kraftausdruck unterscheidet sich bekanntlich von dem Lorentzschen durch das Glied

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}].$$

Wir werden unten sehen, daß die Anwendung unserer allgemeinen Variation gerade dieses, in prinzipieller Hinsicht äußerst wichtige Glied in dem Ausdruck für die ponderomotorische Kraft ergibt.

§ 6. Der Lorentzsche Kraftansatz.

Wie Schwarzschild in der zitierten Arbeit gezeigt hat, läßt sich der Lorentzsche Kraftausdruck durch Variation der Dichte ϱ und der Geschwindigkeit v aus einem Integral herleiten, welches in unserer Schreibweise lautet:

$$-\int dx dy dz du \delta_0 (P^* \Phi) + \int dx dy dz du \mathfrak{A} \delta \varrho = 0,$$

wobei wir wieder unter $\delta \varrho$ und auch unter \mathfrak{A} vierdimensionale Vektoren erster Art verstehen wollen.

Die Potentiale \mathfrak{A} , ϱ bleiben dabei unvariiert.

Born hat aus demselben Integral in einer Arbeit¹⁾, in der es ihm hauptsächlich darauf ankam, eine befriedigende Einwirkung der tragen Masse des Elektrons zu bringen, ebenfalls den Lorentzschen Kraftansatz abgeleitet. Da er vierdimensionale Betrachtungen angestellt hat, erhält er durch seine Variation noch eine vierte, der Zeitkoordinate entsprechende Gleichung, welche die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte angibt. Seine Methode entspricht der in der Hydrodynamik als Lagrangesche bezeichneten.

Es sollen nun in diesem Paragraphen die Resultate dieser Autoren auf einem anderen Wege durch rein lokale Variation aus demselben Integral hergeleitet werden und zwar gelingt dies durch alleinige Variation von P , in welchem Vektor ja ϱ und v zusammengefaßt sind.

1) M. Born, Ann. d. Phys. 28. p. 571. 1909.

Da wir jedoch in unserem allgemeineren Prinzip (19) dasselbe Integral, nur mit anderem Vorzeichen, nämlich

$$+ \int_{\Sigma} dx dy dz du (P^* \Phi),$$

zu variieren haben, so wollen wir hier, um die Rechnungen später ohne weiteres benutzen zu können, die Variation von P in dem mit positiven Vorzeichen versehenen Integral vornehmen.

Führen wir bei konstant gehaltenen Φ den Wert (21) für $\delta_0 P$ ein, so bekommen wir die folgenden δq_x enthaltenden Glieder:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} dx dy dz du \Phi \delta_0 P^* &= \int_{\Sigma} dx dy dz du \left\{ \Phi_x \left[\frac{\partial \delta q_x P^*_y}{\partial y} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial \delta q_x P^*_z}{\partial z} + \frac{\partial \delta q_x P^*_u}{\partial u} \right] \right. \\ &\quad \left. - \Phi_y \frac{\partial}{\partial x} (\delta q_x P^*_y) - \Phi_z \frac{\partial}{\partial x} (\delta q_x P^*_z) \right. \\ &\quad \left. - \Phi_u \frac{\partial}{\partial x} (\delta q_x P^*_u) + ((\delta q_y)) + \right. \\ &\quad \left. + ((\delta q_u)) \right\}. \end{aligned}$$

Werden die nötigen partiellen Integrationen ausgeführt, so erhalten wir:

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{\Sigma} dx dy dz du \Phi \delta_0 P^* \\ &= \int_{\Sigma} dx dy dz du \left\{ \delta q_x \left[P^*_y \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial y} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + P^*_z \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_y}{\partial z} \right) + P^*_u \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial u} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial u} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \delta q_y [\dots] + \dots + \delta q_u [\dots] \right\} \\ &+ \int_S dS \{ \delta q_x [\Phi_x (P^*_x \cos nx + P^*_y \cos ny + P^*_z \cos nz \\ &\quad + P^*_u \cos nu) - (\Phi_x P^*_x + \Phi_y P^*_y + \Phi_z P^*_z \\ &\quad + \Phi_u P^*_u) \cos nx] + \delta q_y [\dots] + \dots \} \\ &= \int_{\Sigma} dx dy dz du \delta q P^* (\diamond \times \Phi) \\ &\quad + \int_S dS \delta q \{ \Phi (P^* n) - n (\Phi P^*) \}. \end{aligned} \right.$$

Wir erhalten daher aus dem am Eingang dieses Paragraphen formulierten Schwarzschild-Bornschen Prinzip durch alleinige Berücksichtigung der Integrale über Σ in der Tat den Lorentzschen Kraftansatz, denn es gilt, wie leicht zu erkennen:

$$(27) \quad \begin{cases} \mathfrak{R}_x = (P^* (\diamond \times \Phi))_{x,y,z} = (P^* \mathfrak{M})_{x,y,z} = \rho \left(\mathfrak{E} + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{H} \right] \right)_{x,y,z} \\ \mathfrak{R}_u = (P^* \mathfrak{M})_u = \frac{i}{c} \rho (\mathfrak{E} v). \end{cases}$$

Die ersten drei Komponenten stellen nun den auf die Volumeneinheit bezogenen Lorentzschen Kraftansatz dar. Die letzte Komponente ist aber gleich der mit i/c multiplizierten an der bewegten Elektrizität pro Zeit- und Volumeneinheit geleisteten Arbeit.

§ 7. Die Viererkraft als Divergenz eines Weltensor.

Nunmehr heben wir die speziellen Voraussetzungen des vorigen Paragraphen auf und wenden das in § 20 formulierte Prinzip (19) in seiner ganzen Allgemeinheit an. Die zu nutzenden lokalen Variationen haben wir bereits in § 5 allgemein ermittelt.

Wenn wir zunächst den zweiten Teil der Wirkungsgröße $+ P^* \Phi$ vollständig variieren, so haben wir noch die Variation von Φ bei konstant gehaltenem P^* auszuführen.

Da nach (25):

$$\delta_0 \Phi = \delta q (\diamond \times \Phi) - \diamond (\Phi \delta q),$$

so erhalten wir, falls nur die δq_x enthaltenden Glieder hingeschrieben werden:

$$\int dx dy dz du \left\{ + P_y^* \delta q_x (\diamond \times \Phi)_{yx} + P_z^* \delta q_x (\diamond \times \Phi)_{zx} \right. \\ \left. + P_u^* \delta q_x (\diamond \times \Phi)_{uz} \right. \\ \left. - P_x^* \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_x \delta q_x) - P_y^* \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_x \delta q_x) \right. \\ \left. - P_z^* \frac{\partial}{\partial z} (\Phi_x \delta q_x) - P_u^* \frac{\partial}{\partial u} (\Phi_x \delta q_x) + ((\delta q_y) + \dots) \right\}$$

Hieraus aber ergibt sich durch partielle Integration und Beachtung, daß infolge der Kontinuitätsgleichung der Elektrizität

$$\diamond \times P \equiv \diamond P^* = 0$$

gilt,

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \limits_{\Sigma} dx dy dz du \{ - \delta q_x [P^*_y (\diamond \times \Phi)_{xy} + P^*_z (\diamond \times \Phi)_{xz} \\ \quad + P^*_u (\diamond \times \Phi)_{zu}] \\ \quad + \delta q_y [\quad] + \dots \} \\ + \int \limits_S dS \{ - \delta q_x [\Phi_x (P^*_x \cos nx + P^*_y \cos ny + P^*_z \cos nz \\ \quad + P^*_u \cos nu)] \\ \quad - \delta q_y [\quad] + \dots \} \\ = \int \limits_{\Sigma} dx dy dz du (- \delta q (P^* \mathfrak{M})) + \int \limits_S dS (- \delta q \Phi (P^* n)). \end{array} \right.$$

Man erkennt daher, wenn man diese Ergebnisse mit den des vorigen Paragraphen vereinigt, daß bei der vollständigen Variation des zweiten Teils der Wirkungsgröße nur das Flächenintegral

$$(29) \quad - \int \limits_S dS \delta q n (P^* \Phi)$$

übrig bleibt. Dieses Flächenintegral aber wird gerade kompensiert durch den zweiten Teil des letzten Flächenintegrals in unserem Prinzip (19).

Variieren wir nunmehr den ersten Teil der Wirkungsgröße $\mathcal{W} - \frac{1}{2} \mathfrak{M}^2$, indem wir setzen:

$$(23) \quad \delta_0 \mathfrak{M}^* = - \delta q (\diamond \times \mathfrak{M}^*) + \diamond \times (\mathfrak{M}^* \delta q),$$

also z. B. für die Komponente $M_{yz} = M^*_{zu}$:

$$(23a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_0 M_{yz} = - \delta q_y \left(\frac{\partial M_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{uz}}{\partial u} \right) \\ \quad + \delta q_z \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial M_{uy}}{\partial u} \right) \\ \quad + \frac{\partial}{\partial x} (\delta q_x M_{zy} + \delta q_y M_{xz} + \delta q_z M_{xy}) \\ \quad - \frac{\partial}{\partial u} (\delta q_y M_{zu} + \delta q_z M_{uy} + \delta q_u M_{yz}), \end{array} \right.$$

so erhalten wir, wenn wir nur die δq_u enthaltenden Glieder hinschreiben:

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Sigma} dx dy dz du \{ & M_{yz} \frac{\partial}{\partial x} (\delta q_x M_{zy}) - M_{yu} \frac{\partial}{\partial x} (\delta q_x M_{yu}) \\
 & + M_{zu} \frac{\partial}{\partial x} (\delta q_x M_{uz}) \\
 & - \delta q_x M_{xy} \left(\frac{\partial M_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yu}}{\partial x} + \frac{\partial M_{uz}}{\partial x} \right) \\
 & + M_{xy} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\delta q_x M_{zy}) - \frac{\partial}{\partial u} (\delta q_x M_{yu}) \right) \\
 & + \delta q_x M_{zx} \left(\frac{\partial M_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yu}}{\partial y} + \frac{\partial M_{uz}}{\partial u} \right) \\
 & + M_{zx} \left(\frac{\partial}{\partial y} (\delta q_x M_{zy}) - \frac{\partial}{\partial u} (\delta q_x M_{uz}) \right) \\
 & - \delta q_x M_{zu} \left(\frac{\partial M_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yu}}{\partial y} + \frac{\partial M_{uz}}{\partial x} \right) \\
 & + M_{zu} \left(\frac{\partial}{\partial y} (\delta q_x M_{yu}) - \frac{\partial}{\partial x} (\delta q_x M_{uz}) \right) \\
 & + ((\delta q_y)) + \dots \}
 \end{aligned}$$

Führen wir die nötigen partiellen Integrationen aus, so bekommen wir, falls nun das Prinzip mit den ausgeführten Variationen vollständig hingeschrieben wird,

$$\begin{aligned}
 (30) \quad & \int_{\Sigma} dx dy dz du \left\{ - \delta q_x \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} (M_{yz}^2 + M_{yu}^2 + M_{zu}^2) \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. - M_{xy}^2 - M_{zx}^2 - M_{zu}^2 \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} (M_{zx} M_{yz} - M_{zu} M_{yu}) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} (M_{xy} M_{yz} - M_{zu} M_{zu}) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial u} (M_{xy} M_{yu} - M_{zx} M_{uz}) \right] \\
 & \quad - \delta q_y \{ \dots \} - \dots \} \\
 & + \int_S dS \delta q_x \{ (M_{yz}^2 + M_{yu}^2 + M_{zu}^2) \cos nx + (M_{zx} M_{yz} \\
 & \quad - M_{zu} M_{yu}) \cos ny + (M_{xy} M_{yz} - M_{zu} M_{zu}) \\
 & \quad \cos nz + (M_{xy} M_{yu} - M_{zx} M_{uz}) \cos nu \} \\
 & + \delta q_y \{ \dots \} + \dots \\
 & + \int_{\Sigma} dx dy dz du (\mathfrak{J}_x \delta q_x + \dots) + \int_S dS \{ \delta q_x \mathfrak{P}_x + \dots \} \\
 & \quad + \int_S dS \{ \cos nx (-\frac{1}{2} \mathfrak{M}^2) + \dots \} = 0.
 \end{aligned}$$

Nunmehr sind die für unser Prinzip nötigen Variationen vollständig ausgeführt.

Die Forderung unseres Prinzips liefert daher zunächst aus den Integralen über Σ die Gleichungen:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_x = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \frac{\partial X_u}{\partial u}, \\ F_y = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \frac{\partial Y_u}{\partial u}, \\ F_z = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \frac{\partial Z_u}{\partial u}, \\ F_u = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\partial U_u}{\partial u}. \end{array} \right.$$

Hierbei haben die Größen $X_x, X_y \dots U_z, U_u$ in der gewöhnlichen Schreibweise die Werte:

$$(32a) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_x = \frac{1}{2}(-\mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_z^2 + \mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2), \\ Y_z = \frac{1}{2}(-\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2 - \mathfrak{H}_z^2 - \mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}_z^2), \\ Z_z = \frac{1}{2}(-\mathfrak{H}_x^2 - \mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2 - \mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2), \\ U_u = \frac{1}{2}(\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2 + \mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2), \end{array} \right.$$

$$(32b) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_y = Y_z = \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y + \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_y, \\ X_z = Z_y = \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_z + \mathfrak{E}_x \mathfrak{E}_z, \\ Y_x = Z_z = \mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_z + \mathfrak{E}_y \mathfrak{E}_z, \end{array} \right.$$

$$(32c) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_x = X_u = -i(\mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y), \\ U_y = Y_u = -i(\mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_x - \mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_z), \\ U_z = Z_u = -i(\mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_y - \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_x). \end{array} \right.$$

Wir haben also in (31) die bekannte Darstellung der ponderomotorischen Kraft durch die Maxwellschen Spannungen und die elektromagnetische Bewegungsgröße.

Die Größen $X_x, X_y \dots U_z, U_u$ sind die Komponenten des von Laue¹⁾ mit

$$(32) \quad T = [[\mathfrak{M} \mathfrak{M}]]$$

bezeichneten Weltensors, jedoch mit dem entgegengesetzten Vorzeichen. Wir können also, wenn wir den Begriff der Divergenz eines Weltensors von Laue übernehmen, für die Gleichungen (31) schreiben:

$$(31a) \quad \mathfrak{F} = -\Delta i \nu T.$$

1) M. Laue, l. c. p. 82.

Mit der Ermittelung dieses Ausdrückes für die Viererkraft haben wir nun aber die ganze Elektrodynamik des Vakuums aus unseren Prinzip hergeleitet. Denn, wie Laue in seinem Buch ausführlich gezeigt hat¹⁾, enthalten die vier Gleichungen:

$$(11a) \quad \diamond \mathfrak{M} = P^*,$$

$$(12) \quad \diamond \times \mathfrak{M} = 0,$$

$$(31a) \quad \mathfrak{F} = - \mathcal{A} i v T,$$

$$(32) \quad T = [[\mathfrak{M} \mathfrak{M}]]$$

die ganze atomistische Elektrodynamik einschließlich des Nachweises, daß sie den Sätzen von der Erhaltung der Energie und des Impulses, sowie dem Relativitätsprinzip genügt.

§ 8. Der Strahlungsdruck auf bewegte Flächen.

Unser Prinzip verlangt ferner das Verschwinden der Integrale über die Begrenzung S . Fassen wir die Integrale über S , die im Prinzip selber vorkommen, zusammen mit den durch die partiellen Integrationen entstandenen, so erhalten wir aus den Gliedern mit δq_x die Gleichung:

$$\begin{aligned} -\mathfrak{P}_x &= \frac{1}{2}(M_{yz}^2 - M_{zx}^2 - M_{xy}^2 - M_{xz}^2 + M_{yu}^2 + M_{zu}^2) \cos nx \\ &+ (M_{xz} M_{yz} - M_{xy} M_{yu}) \cos ny \\ &+ (M_{xy} M_{yz} - M_{xz} M_{zu}) \cos nz \\ &+ (M_{xy} M_{yu} - M_{xz} M_{zu}) \cos nu \end{aligned}$$

oder wenn wir die Bezeichnungen (32 a, b, c) des vorigen Paragraphen wieder aufnehmen:

$$-\mathfrak{P}_x = X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz + X_u \cos nu.$$

Desgleichen ergeben die Koeffizienten von δq_y , δq_z , δq_u :

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\mathfrak{P}_y = Y_x \cos nx + Y_y \cos ny + Y_z \cos nz + Y_u \cos nu, \\ -\mathfrak{P}_z = Z_x \cos nx + Z_y \cos ny + Z_z \cos nz + Z_u \cos nu, \\ -\mathfrak{P}_u = U_x \cos nx + U_y \cos ny + U_z \cos nz + U_u \cos nu. \end{array} \right.$$

Da $X_x, X_y \dots U_u$ die Komponenten eines Weltensors und $\cos nx, \cos ny, \dots \cos nu$ die Komponenten eines Vektors erster Art sind, so folgt aus der Definition des Weltensors²⁾, daß

1) M. Laue, l. c. p. 88.

2) M. Laue, l. c. p. 73.

$\mathfrak{P}_x, \mathfrak{P}_y, \mathfrak{P}_z, \mathfrak{P}_u$ als die Komponenten eines Vierervektors anzusehen sind.

Wir haben also in dem Vektor \mathfrak{P} ein vollständiges Analogon zu der Flächenkraft im gewöhnlichen Raum.

Wir kehren nun auf dieselbe Weise wie es bereits im § 3 geschehen ist, zu dem gewöhnlichen Raum zurück. Es gilt, falls v die Normale des Flächenelements der Begrenzung im gewöhnlichen Raum und v_u die Komponente der Geschwindigkeit des Flächenelements nach dieser Normalen ist, welche wie immer nach außen gerichtet ist:

$$(18) \quad \cos nx : \cos ny : \cos nz : \cos nu = \cos vx : \cos vy : \cos vz : \frac{v_u}{c},$$

also:

$$-\mathfrak{P}_x = X_x \cos vx + X_y \cos vy + X_z \cos vz + \frac{v_u}{c} i X_u$$

.

Wir setzen nun:

$$(33a) \quad \mathfrak{T} = -\mathfrak{P}$$

und nehmen an, daß das Prinzip von der actio und reactio im vierdimensionalen Raum gilt. Dieses Prinzip ist ja bekanntlich für die Lorentzsche Elektrodynamik im gewöhnlichen Raum nicht gültig.

Nach dieser Annahme ist dann \mathfrak{T} die von innen auf die Flächeneinheit der Oberfläche S wirkende Kraft, und wir erhalten für \mathfrak{T} nach dem obigen:

$$T_{x, y, z} = \left\{ \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{E} v + \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{H} v - \frac{1}{2} v (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) + \frac{v_u}{c} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] \right\}_{x, y, z},$$

$$T_u = \frac{i}{c} \left\{ -c [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_v + v_u \frac{1}{2} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) \right\}.$$

Da wir Kräfte und Spannungen mechanisch-elastischer Art völlig ausgeschlossen haben, so kann der durch \mathfrak{T} bestimmte Druck auf die Oberfläche nur herrühren von dem elektromagnetischen Feld, welches von der Fläche S eingeschlossen ist.

In der Tat stimmen die drei ersten Komponenten von \mathfrak{T} genau mit dem von Abraham¹⁾ für die Kraft des Strahlungsdruckes auf die bewegte Flächeneinheit angegebenen Ausdruck überein. Die u -Komponente von \mathfrak{T} liefert aber wieder die energetischen Beziehungen.²⁾

1) M. Abraham, Theorie der Elektrizität. II. p. 316.

2) Vgl. M. Abraham, Theorie der Elektrizität. II. p. 324.

Dritter Teil.

Die Elektrodynamik bewegter materieller Körper.

§ 1. Die Wirkungsgröße.

In der Elektrodynamik der ponderablen Körper spielt neben dem Vektor zweiter Art \mathfrak{M} , dessen Komponenten

$$(1) \quad \begin{cases} M_{yz} = \mathfrak{B}_x, & M_{zx} = \mathfrak{B}_y, & M_{xy} = \mathfrak{B}_z, \\ M_{zu} = -i \mathfrak{E}_x, & M_{yu} = -i \mathfrak{E}_y, & M_{zu} = -i \mathfrak{E}_z, \end{cases}$$

(\mathfrak{B} magnetische Induktion, \mathfrak{E} elektrische Feldstärke) sind, und der von Laue¹⁾ als „Feldvektor“ bezeichnet wird, der von Laue „Verschiebungsvektor \mathfrak{B} “ benannte Vektor zweiter Art eine Rolle.

Die Komponenten von \mathfrak{B} sind, falls \mathfrak{D} die elektrische Verschiebung, \mathfrak{H} die magnetische Feldstärke bedeutet,

$$(2) \quad \begin{cases} V_{yz} = \mathfrak{H}_x, & V_{zx} = \mathfrak{H}_y, & V_{xy} = \mathfrak{H}_z, \\ V_{zu} = -i \mathfrak{D}_x, & V_{yu} = -i \mathfrak{D}_y, & V_{zu} = -i \mathfrak{D}_z. \end{cases}$$

Die beiden Vektoren \mathfrak{B} und \mathfrak{M} stehen miteinander in Beziehung durch die Gleichungen²⁾

$$(3a) \quad w \mathfrak{B} = \epsilon (w \mathfrak{M}),$$

$$(3b) \quad w \mathfrak{M}^* = \mu (w \mathfrak{B}^*).$$

Hierbei bedeuten ϵ die Dielektrizitätskonstante, μ die magnetische Permeabilität, und w ist der als Vierergeschwindigkeit bezeichnete Vektor erster Art mit den Komponenten

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_x = \frac{v_x}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ w_y = \frac{v_y}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ w_z = \frac{v_z}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ w_u = \frac{i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \end{array} \right. \quad w^2 = -1.$$

1) M. Laue, l. c. p. 118, 119.

2) H. Minkowski, l. c. p. 38.

Die Beziehungen (3) können auch geschrieben werden

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{D}' = \varepsilon \mathfrak{E}', \\ \mathfrak{B}' = \mu \mathfrak{H}', \end{array} \right.$$

falls

$$(6 \text{ a}) \quad \mathfrak{D}' = \mathfrak{D} + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{H} \right],$$

$$(6 \text{ b}) \quad \mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{B} \right],$$

$$(6 \text{ c}) \quad \mathfrak{B}' = \mathfrak{B} - \left[\frac{v}{c} \mathfrak{E} \right],$$

$$(6 \text{ d}) \quad \mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - \left[\frac{v}{c} \mathfrak{D} \right]$$

gesetzt wird.

Wir führen wieder ein Weltpotential ein durch die Vektor-gleichung

$$(7) \quad \mathfrak{M} = \diamond \times \Phi,$$

welche die Gleichungen

$$(7 \text{ a}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{B} = \text{curl } \mathfrak{A}, \\ \mathfrak{E} = - \text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \end{array} \right.$$

zusammenfaßt, wenn $\mathfrak{A}, i\varphi$ wieder die Komponenten von Φ sind.

In der Theorie der elektrischen Erscheinungen in ponderablen Körpern spielt ferner der Leitungsstrom J eine Rolle. Der Leitungsstrom kann als Konvektionsstrom der Elektrizität relativ zum Körper aufgefaßt werden. Bewegt sich der Körper selber, so tritt dem Leitungsstrom noch der Konvektionsstrom der wahren Ladung ϱ an die Seite. $J + \varrho v$ ist dann der von den Leitungselektronen herrührende Gesamtstrom.

Wir führen einen Vektor dritter Art P , den Viererstrom ein, welcher in jeder Beziehung dem oben benutzten Vektor dritter Art P entspricht und in diesen übergeht, falls der Leitungsstrom nicht vorhanden ist, indem wir setzen

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{yuz} = \frac{1}{c} (\varrho v_x + J_z), \\ P_{zuz} = \frac{1}{c} (\varrho v_y + J_y), \\ P_{uyz} = \frac{1}{c} (\varrho v_z + J_x) \\ P_{zyz} = i \varrho. \end{array} \right.$$

Die Wirkungsgröße, welche wir unseren Betrachtungen zugrunde legen, muß

1. gegen Lorentztransformationen invariant sein,

2. muß ihre Variation für den Fall des Vakuums mit der Variation der oben benutzten Wirkungsgröße übereinstimmen.

Die naheliegendste Verallgemeinerung der für das Vakuum benutzten Wirkungsgröße, welche diesen Bedingungen genügt, ist die Funktion

$$(9) \quad W = \int \int \int \int dx dy dz du \{ - \frac{1}{2} \mathfrak{M} \mathfrak{B} + P^* \Phi \}.$$

Dieser Wert der Wirkungsgröße soll vorläufig unseren Betrachtungen zugrunde liegen. Später werden wir allerdings eine Erweiterung des Ausdrucks (9) vornehmen müssen. Wir können und werden nämlich zu der Variation von W noch eine für das Vakuum identisch verschwindende Funktion hinzufügen.

§ 2. Die Minkowskischen Grundgleichungen für bewegte materielle Körper.

In der Gleichung (9) sind \mathfrak{M} und \mathfrak{B} Funktionen von Φ bzw. der Ableiteten von Φ .

Der explizite Zusammenhang der angenommenen Wirkungsgröße mit diesen Größen soll zunächst ermittelt werden.

Es gilt nach Minkowski¹⁾ für jeden Vektor zweiter Art die Gleichung

$$w^2 \mathfrak{M} = - \{ w \times w \mathfrak{M} \} + \{ w \times w \mathfrak{M}^* \}^*$$

oder nach (4) auch.

$$(10) \quad \mathfrak{M} = \{ w \times w \mathfrak{M} \} + \{ w \times w \mathfrak{M}^* \}^*.$$

Multipliziert man diesen Ausdruck von \mathfrak{M} nach Art des inneren Produktes mit \mathfrak{B} , so ergibt sich infolge der Regeln

$$(I, 41) \quad \begin{aligned} \mathfrak{A}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) &= - \mathfrak{b}(\mathfrak{A} \mathfrak{a}), \\ \mathfrak{A}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})^* &= \mathfrak{A}^*(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}), \end{aligned}$$

der Ausdruck

$$(11) \quad \mathfrak{M} \mathfrak{B} = - \{ (w \mathfrak{M}) (w \mathfrak{B}) + (w \mathfrak{M}^*) (w \mathfrak{B}^*) \},$$

1) H. Minkowski, l. c. Gleichg. (45).

oder infolge von (8) auch

$$(11 \text{ a}) \quad \mathfrak{M} \mathfrak{B} = - \left\{ \epsilon (\mathfrak{w} \mathfrak{M})^2 + \frac{1}{\mu} (\mathfrak{w} \mathfrak{M}^*)^2 \right\}.$$

Daher bekommen wir nach (7) als in Φ explizite Darstellung von W

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} W = \int_{\Sigma} dx dy dz du \left[\frac{1}{2} \left\{ \epsilon (\mathfrak{w} (\diamond \times \Phi))^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\mu} (\mathfrak{w} (\diamond \times \Phi)^*)^2 \right\} + P^* \Phi \right]. \end{array} \right.$$

Wir werden uns ferner gelegentlich der abkürzenden Bezeichnungen bedienen

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{e} = \mathfrak{w} \mathfrak{M}, \\ i \mathfrak{b} = \mathfrak{w} \mathfrak{M}^*, \quad \mathfrak{b} = \frac{1}{\mu} \mathfrak{e}, \\ \mathfrak{d} = \mathfrak{w} \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{d} = \mu \mathfrak{b}, \\ i \mathfrak{h} = \mathfrak{w} \mathfrak{B}^*, \end{array} \right.$$

welche von Minkowski elektrische Ruhkraft \mathfrak{e} bzw. Ruhinduktion \mathfrak{b} und magnetische Ruhkraft \mathfrak{h} bzw. Ruhinduktion \mathfrak{d} genannt worden sind.

Führen wir diese Bezeichnungen in (130) ein, so können wir auch schreiben

$$(14 \text{ a}) \quad W = \int dx dy dz du \left\{ \frac{1}{2} \left(\epsilon \mathfrak{e}^2 - \frac{1}{\mu} \mathfrak{b}^2 \right) + P^* \Phi \right\}.$$

Der erste Teil der Wirkungsgröße

$$- \int \frac{1}{2} (\mathfrak{M} \mathfrak{B}) dx dy dz du$$

kann nach (13) auch geschrieben werden

$$(14 \text{ b}) \quad \int dx dy dz du \frac{1}{2} \left(\frac{\mathfrak{b}^2}{\epsilon} - \mu \mathfrak{h}^2 \right).$$

Diese Form werden wir später zu benutzen haben. Wir stellen nun mit der mit (9) identischen Form (14 a) der Wirkungsgröße folgendes Prinzip auf, welches uns zu den Minkowskischen Grundgleichungen führen wird:

Es soll die erste Variation des vierfachen Integrals

$$(15) \quad W = \int_{\Sigma} dx dy dz du \left\{ \frac{1}{2} \left(\epsilon \mathfrak{e}^2 - \frac{\mathfrak{b}^2}{\mu} \right) + P^* \Phi \right\}$$

über die vier unabhängigen Variablen x, y, z, u verschwinden, wenn wir $\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z, \Phi_u$ als die gesuchten Funktionen von x, y, z, u ansehen. s und μ sind dabei bekannte Funktionen von x, y, z, u und unter e und b sind die Funktionen

$$(16) \quad \begin{cases} e = w(\diamond \times \Phi), \\ b = -iw(\diamond \times \Phi)^* \end{cases}$$

zu verstehen. Die Vierergeschwindigkeit w ist desgleichen als bekannte Funktion von x, y, z, u anzusehen.

Wir führen die Variationen aus, sammeln die $\delta \Phi_x$ enthaltenden Glieder und erhalten, unter Beachtung, daß

$$(18) \quad \frac{b}{\mu} = h, \quad se = b.$$

$$\begin{aligned} \delta W = \int_S dx dy dz du \left\{ \left[h_x \left(-w_y \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial y} - w_z \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial z} - w_u \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial u} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + w_z \left(h_y \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial y} + h_z \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial z} + h_u \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial u} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + i h_y \left(-w_z \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial u} + w_u \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial z} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + i h_z \left(-w_u \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial y} + w_y \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial u} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + i h_u \left(-w_y \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial z} + w_z \frac{\partial \delta \Phi_x}{\partial y} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + P_x^* \delta \Phi_x \right] + ((\delta \Phi_y)) + \dots + ((\delta \Phi_u)) \right\}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich aber durch partielle Integration

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta W = - \int_S dx dy dz du \delta \Phi_x \left\{ \frac{\partial}{\partial y} ((w \times b)_{xy} + i(w \times h)^*_{xy}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial}{\partial z} ((w \times b)_{xz} + i(w \times h)^*_{xz}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial}{\partial u} ((w \times b)_{xu} + i(w \times h)^*_{xu}) \right. \right. \\ \left. \left. - P_x^* \right\} + \delta \Phi_y \{ \dots \} + \right. \\ \left. + \int_S dS \delta \Phi_x \left\{ ((w \times b) + i(w \times h)^*)_{xy} \cos ny \right. \right. \\ \left. \left. + ((w \times b) + i(w \times h)^*)_{xz} \cos nz \right. \right. \\ \left. \left. + ((w \times b) + i(w \times h)^*)_{xu} \cos nu \right\} \right. \\ \left. + \delta \Phi_y (\dots) \dots \right. \end{aligned} \right.$$

Setzen wir das Oberflächenintegral gleich Null, so bekommen wir, da nach (10), \mathfrak{B} statt \mathfrak{M} gesetzt, und

$$(18) \quad \mathfrak{B} = ((\mathfrak{w} \times \mathfrak{b}) + i(\mathfrak{w} \times \mathfrak{h})^*),$$

die Gleichung

$$(19) \quad \mathfrak{n} \mathfrak{B} = 0,$$

welche, in die gewöhnliche Schreibweise nach § 3, (18) übertragen, mit den Gleichungen

$$(19a) \quad \left\{ \begin{array}{l} [\mathfrak{H} \mathfrak{v}] = \frac{\mathfrak{b}_v}{c} \mathfrak{D}, \\ \mathfrak{v} \mathfrak{D} = 0 \end{array} \right.$$

identisch ist.

Das Integral über Σ liefert dagegen die Gleichungen

$$(20a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial V_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial V_{zu}}{\partial u} = P_x^*, \\ \frac{\partial V_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial V_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial V_{yu}}{\partial u} = P_y^*, \\ \frac{\partial V_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial V_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial V_{zu}}{\partial u} = P_z^*, \\ \frac{\partial V_{uz}}{\partial x} + \frac{\partial V_{uy}}{\partial y} + \frac{\partial V_{zu}}{\partial z} = P_u^* \end{array} \right.$$

oder kurz geschrieben

$$(20) \quad \diamond \mathfrak{B} = P^*.$$

Diese Gleichungen sind aber völlig identisch mit den von Minkowski aufgestellten und lauten in gewöhnlicher Schreibweise

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{curl } \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \varrho \mathfrak{v} + \mathfrak{S} \right\} \\ \text{div. } \mathfrak{D} = \varrho. \end{array} \right.$$

Das zweite System von Grundgleichungen ergibt sich auch hier aus dem Ansatz

$$(7) \quad \mathfrak{M} = \diamond \times \Phi.$$

Da nämlich für jeden Vektor erster Art die Beziehung

$$(I, 60) \quad \diamond \times (\diamond \times \mathfrak{a}) = 0$$

gilt, so ergibt sich

$$(21) \quad \diamond \times \mathfrak{M} = 0,$$

oder ausgeschrieben:

$$(21a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial M_{us}}{\partial y} + \frac{\partial M_{su}}{\partial z} + \frac{\partial M_{sy}}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial M_{zu}}{\partial x} + \frac{\partial M_{uz}}{\partial z} + \frac{\partial M_{xz}}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial M_{uy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{zu}}{\partial y} + \frac{\partial M_{yz}}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial M_{ys}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial z} = 0. \end{array} \right.$$

In gewöhnlicher Schreibweise lauten diese Gleichungen:

$$(21') \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{curl } \mathfrak{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathfrak{B} = 0. \end{array} \right.$$

Damit hätten wir aber unter dem vorausgesetzten Zusammenhang von \mathfrak{M} und \mathfrak{B} , nämlich

$$(3a) \quad w \mathfrak{B} = \varepsilon (w \mathfrak{M}),$$

$$(3b) \quad w \mathfrak{M}^* = \mu (w \mathfrak{B}^*),$$

die dem Relativitätsprinzip entsprechenden Grundgleichungen der Elektrodynamik bewegter materieller Körper aus einem Variationsprinzip hergeleitet.

§ 8. Die dynamische Prinzip für die ponderablen Körper.

Die Möglichkeit der Darstellung der in der Theorie der elektrischen Erscheinungen in ponderablen Körpern eine Rolle spielenden Größen durch Vektoren und Skalare im vierdimensionalen Raum lässt die Aufstellung eines dem oben im zweiten Teil für das Vakuum benutzten ganz analogen dynamischen Prinzips zu. Es zeigt sich hier der Vorteil der angewandten vierdimensionalen Methode, indem sich die Herleitung der Theorie der elektrischen Erscheinungen in ponderablen Körpern, die sonst mit größeren Schwierigkeiten verknüpft ist, ohne nennenswerte neue Schwierigkeiten aus dem oben behandelten Fall des Vakuums übertragen lässt.

Wir wollen wieder wie im zweiten Teil äußere Wirkungen auf unseren Bereich Σ im vierdimensionalen Raum zulassen. Die Integrale, welche diesen entsprechen, sind dieselben wie früher, nur hat die Wirkungsgröße einen anderen Wert.

Wir stellen nun in völliger Analogie zu dem oben im zweiten Teil § 4 angewandten Prinzip ein dynamisches Prinzip für die ponderablen Körper auf, indem wir die Gültigkeit der Gleichung

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \int \limits_{\Sigma} dx dy dz du \{ - \frac{1}{2} \mathfrak{M} \mathfrak{B} + P^* \Phi \} + \int \limits_{\Sigma} dx dy dz du \mathfrak{F} \delta q \\ \quad + \int \limits_{\mathfrak{S}} dS \mathfrak{B} \delta q + \int \limits_{\mathfrak{S}} dS \{ n (- \frac{1}{2} \mathfrak{M} \mathfrak{B} + P^* \Phi) \delta q \} = 0 \end{array} \right.$$

verlangen.

Die in Betracht kommenden Variationen der Vektoren P und Φ leiten wir genau wie oben aus den auf dem vierdimensionalen Fall verallgemeinerten Helmholtzschen Bedingungen

$$\delta(P dS) = 0, \quad \delta(\Phi dS) = 0$$

her und erhalten demgemäß dieselben Variationen für P und Φ wie früher, nur daß jetzt diese Vektoren eine allgemeinere Bedeutung haben.

Helmholtz¹⁾ leitet die Variation der elektrischen Verschiebung \mathfrak{D} her, indem er verlangt:

$$(23) \quad \delta \{ \mathfrak{D}_x dy dz + \mathfrak{D}_y dz dx + \mathfrak{D}_z dx dy \} = 0.$$

Wir verallgemeinern diese Bedingung im Sinne unserer Anschauungen über die Darstellung der elektromagnetischen Vektoren im vierdimensionalen Raum, indem wir festsetzen:

$$\delta \{ (-i \mathfrak{D}_x) dy dz + (-i \mathfrak{D}_y) dz dx + (-i \mathfrak{D}_z) dx dy \\ + du (\mathfrak{H}_x dx + \mathfrak{H}_y dy + \mathfrak{H}_z dz) \} = 0,$$

oder in unserer Vektorschreibweise:

$$(24) \quad \delta(\mathfrak{B}^* d\sigma) = 0.$$

Aus dieser Bedingung erhalten wir aber

$$(25) \quad \delta_0 \mathfrak{B}^* = - \delta q (\diamond \times \mathfrak{B}^*) + \diamond \times (\mathfrak{B}^* \delta q).$$

Die Variation des Feldvektors \mathfrak{M} ergibt sich aus der Variation des Verschiebungsvektors \mathfrak{B} ohne weiteres für den Fall, daß die Dielektrizitätskonstante ϵ und die magnetische Permeabilität μ unvariiert bleiben. Für $\epsilon = 1$, $\mu = 1$ müssen dann nämlich die Variationen identisch werden.

Wir bekommen also für die Variation des Feldvektors \mathfrak{M} , falls ϵ und μ unvariiert bleiben,

$$(26) \quad \delta_0 \mathfrak{M}^* = - \delta q (\diamond \times \mathfrak{M}^*) + \diamond \times (\mathfrak{M}^* \delta q).$$

1) H. Helmholtz, I. c.

§ 4. Die ponderomotorische Kraft.

Ein dem Schwarzschildchen wie im § 6 des zweiten Teiles nachgebildetes dynamisches Prinzip für ponderable Körper ergibt genau wie oben als Kraftansatz den Ausdruck

$$P^*(\diamond \times \Phi) = P^* \mathfrak{M}$$

oder in gewöhnlicher Schreibweise:

$$(27) \quad \begin{cases} (P^* \mathfrak{M})_x = \rho \left(\mathfrak{E}_x + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{B} \right]_x \right) + \frac{1}{c} [\Im \mathfrak{B}]_x, \\ (P^* \mathfrak{M})_y = \rho \left(\mathfrak{E}_y + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{B} \right]_y \right) + \frac{1}{c} [\Im \mathfrak{B}]_y, \\ (P^* \mathfrak{M})_z = \rho \left(\mathfrak{E}_z + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{B} \right]_z \right) + \frac{1}{c} [\Im \mathfrak{B}]_z, \\ (P^* \mathfrak{M})_u = \frac{i}{c} (\rho (v \mathfrak{E}) + \Im \mathfrak{E}). \end{cases}$$

Hierbei bedeutet

$$\rho \left\{ \mathfrak{E} + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{B} \right] \right\}$$

die vom Felde auf die konvektiv bewegten wahren Ladungen ausgeübte Kraft, während

$$\frac{1}{c} [\Im \mathfrak{B}]$$

die Kraft darstellt, die auf den Leitungsstrom wirkt. Diese Kraft wird also nicht durch die magnetische Feldstärke, sondern durch die magnetische Induktion bestimmt.¹⁾

Die vierte der Gleichungen (145) schreiben wir besser

$$(P^* \mathfrak{M})_u = \frac{i}{c} \left\{ \rho (v \mathfrak{E}) + \frac{v}{c} [\Im \mathfrak{B}] + (\Im, \mathfrak{E} + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{B} \right]) \right\},$$

denn nunmehr haben wir in

$$\rho (v \mathfrak{E}) + \frac{v}{c} [\Im \mathfrak{B}]$$

die Arbeit der eben erwähnten ponderomotorischen Kräfte, die in der Zeiteinheit an der Volumeneinheit geleistet wird, während

$$\Im \left\{ \mathfrak{E} + \left[\frac{v}{c} \mathfrak{B} \right] \right\}$$

als Joulesche Wärme anzusehen ist.²⁾

1) Vgl. R. Gans, Physik. Zeitschr. 12. p. 806. 1911.

2) M. Abraham, l. c. I. — W. v. Ignatowsky, Das Relativitätsprinzip. Archiv d. Math. u. Phys. 17. p. 36. — M. Laue, l. c. p. 141.

Die Anwendung des Prinzips in seinem vollen Umfange ergibt die ponderomotorische Kraft wieder als Divergenz eines Weltensors. Wie unmittelbar aus dem obigen hervorgeht,¹⁾ ergeben die Integrale über Σ

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_x = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \frac{\partial X_u}{\partial u}, \\ F_y = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \frac{\partial Y_u}{\partial u}, \\ F_z = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \frac{\partial Z_u}{\partial u}, \\ F_u = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\partial U_u}{\partial u}. \end{array} \right.$$

Hierbei ist gesetzt

$$(29a) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_x = \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_x + \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_x - \frac{1}{2}(\mathfrak{H} \mathfrak{B} + \mathfrak{E} \mathfrak{D}), \\ Y_y = \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_y + \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_y - \frac{1}{2}(\mathfrak{H} \mathfrak{B} + \mathfrak{E} \mathfrak{D}), \\ Z_z = \mathfrak{H}_z \mathfrak{B}_z + \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_z - \frac{1}{2}(\mathfrak{H} \mathfrak{B} + \mathfrak{E} \mathfrak{D}), \\ U_u = \frac{1}{2}(\mathfrak{E} \mathfrak{D} + \mathfrak{H} \mathfrak{B}). \end{array} \right.$$

$$(29b) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_y = Y_x = \frac{1}{2}(\mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_x + \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_x), \\ X_z = Z_x = \frac{1}{2}(\mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_z + \mathfrak{H}_z \mathfrak{B}_x + \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_z + \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_x), \\ Y_z = Z_y = \frac{1}{2}(\mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_z + \mathfrak{H}_z \mathfrak{B}_y + \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_z + \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_y). \end{array} \right.$$

$$(29c) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_x = X_u = -i \frac{1}{2}(\mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_y + \mathfrak{D}_y \mathfrak{B}_z - \mathfrak{D}_z \mathfrak{B}_y), \\ U_y = Y_u = -i \frac{1}{2}(\mathfrak{E}_z \mathfrak{H}_x - \mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_z + \mathfrak{D}_x \mathfrak{B}_z - \mathfrak{D}_z \mathfrak{B}_x), \\ U_z = Z_u = -i \frac{1}{2}(\mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_y - \mathfrak{E}_y \mathfrak{H}_x + \mathfrak{D}_x \mathfrak{B}_y - \mathfrak{D}_y \mathfrak{B}_x). \end{array} \right.$$

Soll die letzte der Gleichungen (28) wieder einen Ausdruck für das Energieprinzip darstellen, so liegt es nahe, auch hier $i c U_x$, $i c U_y$, $i c U_z$ als die Komponenten des Energiestroms \mathfrak{E} zu deuten, U_u als Energiedichte und die anderen Tensorkomponenten als Maxwell'sche Spannungen anzusehen.

Wir hätten dann genau das Hertz'sche System von Maxwell'schen Spannungen und den gleichen Ausdruck für die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes.

Es hieße aber die wohlerprobten Ansätze der Elektrodynamik ruhender materieller Körper aufgeben, wenn man den oben in einfachster Weise aus den Vektoren \mathfrak{M} und \mathfrak{B} kon-

1) \mathfrak{M} und \mathfrak{B} werden ja in gleicher Weise und genau wie \mathfrak{M} im zweiten Teil variiert.

struierten Tensor (29) für die ponderomotorischen Kräfte zu grunde legen wollte. Denn für die in Ruhe befindlichen ponderablen Körper gilt

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E} \\ \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} \end{array} \right.$$

und wir würden demnach aus den Ausdrücken für U_x , U_y , U_z erhalten:

$$(31) \quad \mathfrak{S} = \frac{\epsilon \mu + 1}{2} c [\mathfrak{E} \mathfrak{H}],$$

wenn \mathfrak{S} den Energiestrom bedeutet.

Der Poyntingsche Ansatz für den Energiestrom

$$\mathfrak{S} = c [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]$$

müßte demnach aufgegeben werden.

Auf diese Tatsache hat M. Abraham¹⁾ aufmerksam gemacht, als er bei der Aufgabe, zu zeigen, daß die von ihm hergeleiteten Ausdrücke für die ponderomotorischen Kräfte mit dem Relativitätsprinzip in Einklang stehen, auf genau denselben Weltensor (29) gestoßen war.

§ 5. Der Abrahamsche Ausdruck für die ponderomotorische Kraft.

Indessen ist es Abraham gelungen den Weltensor (29) durch einen Zusatztensor derart zu erweitern, daß bei ruhenden materiellen Körpern für die Energieströmung gerade der Poyntingsche Ansatz hervorgeht.

Unser Prinzip in der obigen Fassung ist nun nicht im stande den Abrahamschen Kraftausdruck zu liefern.

Es ist aber hier zu beachten, daß in der Herleitung der Wirkungsgröße noch eine gewisse Willkür steckt, die wir bereits oben bezeichnet haben. Wir haben nämlich die Wirkungsgröße in § 1 durch Verallgemeinerung der für das Vakuum benutzten gewonnen. Die benutzte Verallgemeinerung ist aber insofern nicht eindeutig, als immer noch eine für den Fall des Vakuums identisch verschwindende Funktion in das Prinzip aufgenommen werden kann.

1) M. Abraham, l. c. II.

Die Abrahamsche Arbeit¹⁾ zeigt uns den Weg, die Ergänzung zur Wirkungsgröße zu finden, welche nötig ist, um den Abrahamschen Kraftausdruck herzuleiten. Abraham hat nämlich den Tensor (29) ermittelt, indem er eine gewisse quadratische Form aufgestellt hat, deren Koeffizienten dann die Tensorkomponenten sind. Ebenso hat er den Zusatztensor hergeleitet.

Es liegt die Vermutung nahe, daß der leicht zu erkennende äußere Zusammenhang zwischen der ersten Abrahamschen quadratischen Form und der von uns benutzten Wirkungsgröße derselbe ist wie der zwischen der von Abraham für den Zusatztensor benutzten quadratischen Form und der von uns gesuchten Funktion, die wir zu unserer Wirkungsgröße hinzuzufügen haben. In der Tat gelangen wir durch eine derartige Vergleichung zum Ziel.

Wir führen den auch von Abraham benutzten Minkowskischen Begriff des Ruhstrahls²⁾ Ω ein durch die Gleichung

$$(32) \quad \Omega = -i c w (\mathbf{e} \times \mathbf{h})^*$$

wo w , \mathbf{e} , \mathbf{h} die angegebene Bedeutung haben.

Die beiden Vektoren Ω und w sind zueinander orthogonal, es gilt:

$$(33) \quad w \cdot \Omega = 0.$$

Ω ist, wie aus der Darstellung (32) folgt, ein Vektor erster Art, dessen x -Komponente lautet:

$$\Omega_x = -i c \{ w_y (\mathbf{e} \times \mathbf{h})^*_{xy} + w_z (\mathbf{e} \times \mathbf{h})^*_{xz} + w_u (\mathbf{e} \times \mathbf{h})^*_{zu} \}.$$

Da nach (181) (124)

$$\mathbf{e}_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{E}'_x, \quad \mathbf{h}_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{H}'_x,$$

$$\mathbf{e}_u = \frac{i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{v}{c} \mathbf{E}' \right), \quad \mathbf{h}_u = \frac{i \left(\frac{v}{c} \mathbf{H}' \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

so gilt

1) M. Abraham l. c. (II).

2) H. Minkowski l. c. p. 34.

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{e} \times \mathbf{h})_{zu}^* &= (\mathbf{e} \times \mathbf{h})_{yz} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} [\mathbf{E}' \mathbf{H}]_x \\
 &= \frac{i}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[\mathbf{E}'_x \left(\frac{v}{c} \mathbf{H}' \right) - \mathbf{H}'_x \left(\frac{v}{c} \mathbf{E}' \right) \right] \\
 &= \frac{i}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[\frac{v}{c} [\mathbf{E}' \mathbf{H}] \right]_x
 \end{aligned}$$

und es geht daher für den Fall, daß sich der Körper in Ruhe befindet Ω in das Vektorprodukt $c[\mathbf{E} \mathbf{H}]$ über.

Die Bezeichnung des Vektors Ω als „Ruhstrahl“ findet hierin ihre Berechtigung.

Wir stellen nunmehr ein neues Prinzip auf, indem wir die Gültigkeit der Gleichung verlangen:

$$\left(34\right) \quad \left. \begin{aligned} &\delta \int \limits_{\Sigma} dx dy dz du \{-\frac{1}{2} (\mathfrak{M} \mathfrak{B}) + P^* \Phi\} \\ &+ \int \limits_{\Sigma} dx dy dz du \delta_0 \left\{ \frac{s \mu - 1}{2} (\mathfrak{w} \Omega) \right\} \\ &+ \int \limits_{\Sigma} dx dy dz du \mathfrak{F} \delta q + \int \limits_S dS \mathfrak{P} \delta q \\ &+ \int \limits_S dS \{n (-\frac{1}{2} \mathfrak{M} \mathfrak{B} + P^* \Phi) \delta q\} = 0 \end{aligned} \right\}$$

Das hinzugefügte Glied verschwindet für das Vakuum. Da nämlich

$$(35) \quad \mathfrak{w} \Omega \equiv 0,$$

so gilt in jedem Falle

$$\delta_0 \frac{s \mu - 1}{2} (\mathfrak{w} \Omega) = \frac{s \mu - 1}{2} \delta_0 (\mathfrak{w} \Omega)$$

und daher für das Vakuum

$$\delta_0 \frac{s \mu - 1}{2} (\mathfrak{w} \Omega) \equiv 0.$$

Aus der Bedingung (35) folgt natürlich keineswegs das Verschwinden von $\delta_0 (\mathfrak{w} \Omega)$, $\mathfrak{w} \delta_0 \Omega$ oder das von $\Omega \delta_0 \mathfrak{w}$.

Die Variation der Vierergeschwindigkeit \mathfrak{w} kann auf folgende Weise ermittelt werden.

Es gilt für den Vektor dritter Art

$$(35a) \quad P = \left(\frac{\varrho v}{c}, \quad i \varrho \right)$$

die Beziehung

$$(35) \quad P = \varrho_0 w$$

falls der Pseudoskalar ϱ_0

$$(36) \quad \varrho_0 = \varrho \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

die Ruhdichte der Elektrizität bedeutet.

Wir setzen nun fest, daß bei der Variation die Gleichung

$$(37) \quad \delta(\varrho_0 d \Sigma) = 0$$

gilt. Dann erhalten wir aus (I, 85) für die Variation der Ruhdichte den auch von Minkowski-Born¹⁾ benutzten Wert der Variation der Ruhdichte

$$(38) \quad \delta_0 \varrho_0 = - \left(\frac{\partial \varrho_0 \delta q_x}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_0 \delta q_y}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_0 \delta q_z}{\partial z} + \frac{\partial \varrho_0 \delta q_u}{\partial u} \right).$$

Da wir nun die Variation von P aus dem obigen kennen, so ergibt sich aus der Beziehung (35a) auch die Variation der Vierergeschwindigkeit, und zwar ergibt eine einfache Rechnung mit Beachtung, daß infolge der Kontinuitätsgleichung

$$(39) \quad \diamond \times \varrho_0 w = \left(\frac{\partial \varrho_0 w_x}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_0 w_y}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_0 w_z}{\partial z} + \frac{\partial \varrho_0 w_u}{\partial u} \right) k_{xyzu} = 0$$

$$(40) \quad \delta_0 w = - (\delta q \diamond) w + (w \diamond) \delta q.$$

Nunmehr können wir auch die Variation von Ω berechnen, denn wir kennen die Variationen von \mathfrak{M} , \mathfrak{B} und w , und daher auch von e und \mathfrak{h} . Jedoch ist diese Rechnung dermaßen umständlich und weitläufig, daß sie nicht durchgeführt werden soll.

Es soll vielmehr nur gezeigt werden, daß der (40) ganz analoge Ansatz

$$(41) \quad \delta_0 \Omega = - (\delta q \diamond) \Omega + (\Omega \diamond) \delta q$$

uns zu dem Abrahamschen Kraftausdruck gelangen läßt.

Führen wir die Variationen von w und Ω in dem hinzugefügten Gliede aus, so erhalten wir, falls ε und μ unverändert bleiben, und

$$(42) \quad (\varepsilon \mu - 1) \Omega = \Omega'$$

1) Minkowski-Born, I. c. (Gl. 9).

gesetzt wird, folgende Glieder mit δq_x :

$$\int \limits_{\Sigma} dx dy dz du \frac{1}{2} \delta_0 (w \Omega') = \int \limits_{\Sigma} dx dy dz du \left\{ \frac{-\delta q_x}{2} \left[\Omega'_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \Omega'_y \frac{\partial w_y}{\partial x} + \Omega'_z \frac{\partial w_z}{\partial x} + \Omega'_u \frac{\partial w_u}{\partial x} + w_x \frac{\partial \Omega'_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial \Omega'_y}{\partial x} + w_z \frac{\partial \Omega'_z}{\partial x} + w_u \frac{\partial \Omega'_u}{\partial x} \right] \right. \\ \left. + \int \limits_{\Sigma} dx dy dz du \frac{1}{2} \left\{ w_x \Omega'_x \frac{\partial \delta q_x}{\partial x} + w_y \Omega'_x \frac{\partial \delta q_x}{\partial y} + w_z \Omega'_x \frac{\partial \delta q_x}{\partial z} + w_u \Omega'_x \frac{\partial \delta q_x}{\partial u} + w_u \Omega'_x \frac{\partial \delta q_x}{\partial x} + \Omega'_x w_x \frac{\partial \delta q_x}{\partial x} + \Omega'_y w_x \frac{\partial \delta q_x}{\partial y} + \Omega'_z w_x \frac{\partial \delta q_x}{\partial z} + \Omega'_u w_x \frac{\partial \delta q_x}{\partial u} \right\} + ((\delta q_y)) + \dots \right\}$$

Durch partielle Integration entsteht hieraus unter Beachtung von (33):

$$(43) \quad \left\{ \int \limits_{\Sigma} dx dy dz du \left\{ -\delta q_x \left[\frac{\partial}{\partial x} w_x \Omega'_x + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{2} (w_z \Omega'_y + w_y \Omega'_z) + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{2} (w_x \Omega'_z + w_z \Omega'_x) + \frac{\partial}{\partial u} \frac{1}{2} (w_x \Omega'_u + w_u \Omega'_x) - \frac{\partial}{\partial x} (w \Omega) \right] \right\} - \delta q_y \{ \dots \} \dots \right. \\ \left. + \int \limits_{\Sigma} dS \delta q_x \{ w_x \Omega'_x \cos nx + \frac{1}{2} (w_x \Omega'_y + w_y \Omega'_x) \cos ny + \frac{1}{2} (w_x \Omega'_z + w_z \Omega'_x) \cos nz + \frac{1}{2} (w_x \Omega'_u + w_u \Omega'_x) \cos nu \} + \delta q_y \{ \dots \} + \dots \right.$$

Als Gesamtresultat erhalten wir daher aus dem Prinzip (152) für die ponderomotorische Kraft den Ausdruck

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathfrak{F}}_x = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \frac{\partial X_u}{\partial u}, \\ \tilde{\mathfrak{F}}_y = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \frac{\partial Y_u}{\partial u}, \\ \tilde{\mathfrak{F}}_z = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \frac{\partial Z_u}{\partial u}, \\ \tilde{\mathfrak{F}}_u = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\partial U_u}{\partial u}, \end{array} \right.$$

wo nunmehr der Weltensor $X_x \dots U_u$ bestimmt ist durch die Beziehungen

$$\begin{aligned}
 X_x &= \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_x - \frac{i}{2} (\mathfrak{E} \mathfrak{D} + \mathfrak{H} \mathfrak{B}) + w_x \Omega'_x, \\
 X_y &= \frac{i}{2} (\mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_x + w_x \Omega'_y + w_y \Omega'_x), \\
 X_u &= -\frac{i}{2} ([\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_x + [\mathfrak{D} \mathfrak{B}]_x) + \frac{1}{2} (w_x \Omega'_u + w_u \Omega'_x), \\
 U_u &= \frac{1}{2} (\mathfrak{E} \mathfrak{D} + \mathfrak{H} \mathfrak{B}) + w_u \Omega'_u.
 \end{aligned}$$

Wenn wir setzen

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega'_x = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \mathfrak{B}_x \\ \Omega'_y = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \mathfrak{B}_y \\ \Omega'_z = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \mathfrak{B}_z \\ \Omega'_u = i \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(\frac{v}{c} \mathfrak{B} \right), \end{array} \right.$$

so erhalten wir

$$(46 \text{ a}) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_x = \frac{1}{2} (-\mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_x - \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_y - \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_x - \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_y - \mathfrak{H}_z \mathfrak{B}_z \\ \quad + \frac{v_x}{c} \mathfrak{B}_x, \\ Y_y = \frac{1}{2} (-\mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_x + \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_y - \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_z - \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_y - \mathfrak{H}_z \mathfrak{B}_z \\ \quad + \frac{v_y}{c} \mathfrak{B}_y, \\ Z_z = \frac{1}{2} (-\mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_x - \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_z - \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_x - \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_z \mathfrak{B}_z \\ \quad + \frac{v_z}{c} \mathfrak{B}_z, \\ U_u = \frac{1}{2} (-\mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_x + \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_x + \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_z \mathfrak{B}_z \\ \quad - \frac{v}{c} \mathfrak{B}), \end{array} \right.$$

$$(46 \text{ b}) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_y = Y_x = \frac{1}{2} \left(\mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_y + \mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_y + \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_x, \right. \\ \quad \left. + \frac{v_x}{c} \mathfrak{B}_y + \frac{v_y}{c} \mathfrak{B}_x \right), \\ X_z = Z_x = \frac{1}{2} \left(\mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_z + \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_z + \mathfrak{H}_z \mathfrak{B}_x, \right. \\ \quad \left. + \frac{v_x}{c} \mathfrak{B}_z + \frac{v_z}{c} \mathfrak{B}_x \right), \\ Y_z = Z_y = \frac{1}{2} \left(\mathfrak{E}_y \mathfrak{D}_z + \mathfrak{E}_z \mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_y \mathfrak{B}_z + \mathfrak{H}_z \mathfrak{B}_y, \right. \\ \quad \left. + \frac{v_y}{c} \mathfrak{B}_z + \frac{v_z}{c} \mathfrak{B}_y \right). \end{array} \right.$$

$$(46 \text{ c}) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_x = X_u = -i \frac{1}{2} \left([\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_x + [\mathfrak{D} \mathfrak{B}]_x - \mathfrak{W}_x - \frac{v_x}{c} \left(\frac{v}{c} \mathfrak{W} \right) \right), \\ U_y = Y_u = -i \frac{1}{2} \left([\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_y + [\mathfrak{D} \mathfrak{B}]_y - \mathfrak{W}_y - \frac{v_y}{c} \left(\frac{v}{c} \mathfrak{W} \right) \right), \\ U_z = Z_u = -i \frac{1}{2} \left([\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_z + [\mathfrak{D} \mathfrak{B}]_z - \mathfrak{W}_z - \frac{v_z}{c} \left(\frac{v}{c} \mathfrak{W} \right) \right). \end{array} \right.$$

Dieser Tensor ist aber nun genau identisch mit dem von Abraham konstruierten¹⁾, denn der Vektor \mathfrak{W} hat hier denselben Wert wie bei Abraham, wie sich leicht bestätigen läßt.

Für den Fall ruhender ponderabler Körper ergibt sich nunmehr in der Tat der Poyntingsche Ausdruck für den Energiestrom, denn aus dem angeführten Wert von

$$X_u = -\frac{i}{c} \mathfrak{S}_x = -\frac{i}{2} ([\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_x + [\mathfrak{D} \mathfrak{B}]_x + i(w_x \Omega_u' + w_u \Omega_x))$$

erhalten wir für $v = 0$ in der Tat

$$\mathfrak{S}_x = c \left(\frac{\varepsilon \mu + 1}{2} - \frac{\varepsilon \mu + 1}{2} \right) [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_x = c [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]_x.$$

Damit haben wir zwar nun auch die Abrahamschen Kraftausdrücke aus einem Variationsprinzip hergeleitet. In-dessen erscheint es als ein Mangel, daß in dem hierbei benutzten Prinzip (34) von einer bestimmten Wirkungsgröße nicht die Rede sein kann.

§ 6. Berücksichtigung der Variation von ε und μ .

Wir haben die Variation des Feldvektors \mathfrak{W} aus der des Verschiebungsvektors \mathfrak{B} abgeleitet unter der Bedingung, daß ε und μ nicht variiert werden. Wenn wir nun aber die Variation von ε und μ allgemein zulassen, so werden wir natürlich vorteilhafterweise eine Form der Wirkungsgröße wählen, in der ε und μ explizit vorkommen, also etwa eine der Formen (14).

Von diesen Formen ist für uns die vorteilhafteste

$$(14 \text{ b}) \quad W = \int \limits_{\Sigma} dx dy dz du \frac{1}{2} \left(\frac{\mathfrak{b}^2}{\varepsilon} - \mu \mathfrak{h}^2 \right);$$

denn infolge der Beziehung

$$\mathfrak{B} = (\mathfrak{w} \times \mathfrak{v}) + i(\mathfrak{w} \times \mathfrak{h})^*,$$

1) M. Abraham, I. c. II.

welche wir bereits oben benutzt haben, ist der Verschiebungsvektor \mathfrak{B} mit den Vektoren \mathfrak{b} , \mathfrak{h} auf das engste verknüpft. Die Variationen von \mathfrak{b} und \mathfrak{h} sind daher unabhängig von der oben gemachten Voraussetzung, daß ε und μ nicht variiert werden sollen. Da der Feldvektor \mathfrak{M} mit \mathfrak{e} und \mathfrak{b} durch die Gleichung

$$\mathfrak{M} = (\mathfrak{w} \times \mathfrak{e}) + i(\mathfrak{w} \times \mathfrak{b})^*$$

zusammenhängt, bei der Variation von \mathfrak{M} aber Unvariierbarkeit von ε und μ vorausgesetzt ist, so können wir von den Variationen von \mathfrak{e} und \mathfrak{b} nicht dasselbe behaupten. Aus diesem Grunde ist die Form (14 b) der Wirkungsgröße hier vorzuziehen.

Die durch allgemeine Zulassung der Variation von ε und μ zu dem Ausdruck für die ponderomotorische Kraft hinzutretenden Glieder erhalten wir also aus dem Integral

$$(47) \quad \int \limits_{\Sigma} dx dy dz du \frac{1}{2} \left(\mathfrak{b}^2 \delta_0 \frac{1}{\varepsilon} - \mathfrak{h}^2 \delta_0 \mu \right).$$

Führen wir die Variation aus, indem wir in Verallgemeinerung der Helmholtzschen Bedingungen setzen

$$(48) \quad \delta_0 \varepsilon = -\delta \mathfrak{q} \diamond \varepsilon = -\left(\delta \mathfrak{q}_x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \delta \mathfrak{q}_y \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \delta \mathfrak{q}_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \delta \mathfrak{q}_u \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} \right),$$

$$(49) \quad \delta_0 \mu = -\delta \mathfrak{q} \diamond \mu = -\left(\delta \mathfrak{q}_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + \delta \mathfrak{q}_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + \delta \mathfrak{q}_z \frac{\partial \mu}{\partial z} + \delta \mathfrak{q}_u \frac{\partial \mu}{\partial u} \right),$$

so erhalten wir

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \limits_{\Sigma} dx dy dz du \left\{ -\delta \mathfrak{q}_x \left(-\frac{\mathfrak{e}^2}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{\mathfrak{h}^2}{2} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \right. \\ \left. -\delta \mathfrak{q}_y \left(-\frac{\mathfrak{e}^2}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} - \frac{\mathfrak{h}^2}{2} \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) \right. \\ \left. -\delta \mathfrak{q}_z \left(-\frac{\mathfrak{e}^2}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{\mathfrak{h}^2}{2} \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) \right. \\ \left. -\delta \mathfrak{q}_u \left(-\frac{\mathfrak{e}^2}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} - \frac{\mathfrak{h}^2}{2} \frac{\partial \mu}{\partial u} \right) \right\}. \end{array} \right.$$

Wir haben also noch zu unseren Ausdrücken für die ponderomotorische Kraft hinzuzufügen

$$(51 a) \quad -\frac{\mathfrak{e}^2}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{\mathfrak{h}^2}{2} \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

zu der x -Komponente, entsprechende Glieder zu der y, z -Komponente und

$$(51 \text{ b}) \quad - \frac{e^2}{2} \frac{\partial s}{\partial u} - \frac{h^2}{2} \frac{\partial \mu}{\partial u}$$

zu der energetischen Komponente.

Diese Ausdrücke stimmen ebenfalls mit den Abraham-schen überein, denn es gilt z. B. für den Fall, daß die x -Achse mit der Richtung der Geschwindigkeit v zusammenfällt

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} e^2 = E_x'^2 + \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} (E_y'^2 + E_z'^2), \\ h^2 = H_x'^2 + \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} (H_y'^2 + H_z'^2). \end{array} \right.$$

Das erweiterte Prinzip liefert wegen

$$w \Omega = -i c (w (b \times h)^*) \frac{w}{s} \equiv 0$$

kein neues Glied zu dem Ausdruck für die ponderomotorische Kraft.

Wenn wir nun den Tensor

$$(53) \quad T = [[\mathfrak{M} \mathfrak{B}]] + [[w \Omega]] (\epsilon \mu - 1)$$

einführen, wobei wir mit Laue¹⁾ unter $[[\mathfrak{M} \mathfrak{B}]]$ die Ausdrücke

$$(54) \quad \left[\begin{array}{l} [[\mathfrak{M} \mathfrak{B}]]_{jk} = \frac{1}{4} \{ (M_{jx} V_{xz} + M_{jy} V_{xy} + M_{jz} V_{xz} + M_{ju} V_{ku}) \\ \quad + (M_{kx} V_{jx} + M_{ky} V_{jy} + M_{kz} V_{jx} + M_{ku} V_{ju}) \\ \quad - (M^*_{jx} V^*_{xz} + M^*_{jy} V^*_{xy} + M^*_{jz} V^*_{xz} + M^*_{ju} V^*_{ku}) \\ \quad - (M^*_{kx} V^*_{jx} + M^*_{ky} V^*_{jy} + M^*_{kz} V^*_{jx} + M^*_{ku} V^*_{ju}) \} \\ \quad j, k = x, y, z, u, \end{array} \right.$$

$$M_{jj} = 0, \quad M_{jk} = -M_{kj}$$

verstehen, und wobei der aus den Vektoren erster Art w und Ω gebildete Tensor $[[w \Omega]]$ die Komponenten

$$(55) \quad [[w \Omega]]_{jk} = -\frac{1}{2} (w_j \Omega_k + w_k \Omega_j) \quad j, k = x, y, z, u$$

hat, so können wir, wie unmittelbar zu erkennen, den end-gültigen Ausdruck für die ponderomotorische Kraft in der

1) M. Laue, I. c. p. 74 (80).

Elektrodynamik bewegter materieller Körper in die Form bringen

$$(56) \quad \mathfrak{F} = - \Delta i v T - \frac{e^2}{2} \diamond \varepsilon - \frac{h^2}{2} \diamond \mu .$$

Es ist unmittelbar zu erkennen, daß dieser von Abraham zuerst hergeleitete Ausdruck für die ponderomotorische Kraft dem Relativitätsprinzip genügt; denn \mathfrak{F} ist offenbar ein Vektor erster Art.

Es zeigen sich auch hier wieder die Vorzüge der vektoranalytischen Darstellung im vierdimensionalen Raum, denn wir können sagen, daß in den aus unserem Prinzip hergeleiteten Gleichungen (56) und

$$(20) \quad \diamond \mathfrak{B} = P^*,$$

$$(21) \quad \diamond \times \mathfrak{M} = 0,$$

im Verein mit den vorausgesetzten Beziehungen zwischen \mathfrak{B} und \mathfrak{M}

$$(3a) \quad w \mathfrak{B} = s(w \mathfrak{M}),$$

$$(3b) \quad w \mathfrak{M}^* = \mu(w \mathfrak{B}^*),$$

sowie der hier nicht weiter in Betracht gekommenen Beziehung zwischen Leitungsstrom und Leitfähigkeit σ :

$$P^* + w(w P^*) = \frac{\sigma}{c} (w \mathfrak{M}),^1$$

die ganze Elektrodynamik bewegter Körper enthalten ist, einschließlich des Nachweises, daß sie den Sätzen von der Erhaltung der Energie und des Impulses, sowie dem Relativitätsprinzip genügt.

§ 7. Der Strahlungsdruck in der Theorie der Elektrodynamik bewegter materieller Körper.

Die vollständige Anwendung unseres Prinzips liefert aus den Integralen über die Begrenzung, ganz analog dem § 8 des zweiten Teiles, die Gleichungen:

$$-\mathfrak{B}_x = X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz + X_u \cos nu,$$

$$-\mathfrak{B}_y = Y_x \cos nx + Y_y \cos ny + Y_z \cos nz + Y_u \cos nu,$$

$$-\mathfrak{B}_z = Z_x \cos nx + Z_y \cos ny + Z_z \cos nz + Z_u \cos nu,$$

$$-\mathfrak{B}_u = U_x \cos nx + U_y \cos ny + U_z \cos nz + U_u \cos nu.$$

1) M. Laue, I. c. p. 125.

Hierbei haben $X_z \dots U_u$ die Werte (46). Man überzeugt sich von der Richtigkeit dieser Behauptung aus dem Oberflächenintegral (43) und dem im zweiten Teil, § 7, ausführlich angegebenen Rechnungen, wenn man berücksichtigt, daß \mathfrak{B} und \mathfrak{B} in gleicher Weise und genau wie \mathfrak{M} im zweiten Teil variiert werden.

Ersetzen wir die von außen auf die Flächeneinheit der Oberfläche S wirkende Kraft \mathfrak{P} durch die, dieser entgegengesetzt gleich angenommenen, von innen auf die Oberflächeneinheit wirkende,

$$(57) \quad \mathfrak{T} = -\mathfrak{P}$$

und gehen wir auf die nun bereits mehrmals angewandte, durch (II, 18) gekennzeichnete Weise zu Betrachtungen im gewöhnlichen Raum über, so erhalten wir, falls v , wie immer, die äußere Normale bedeutet:

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{T}_x = X_x \cos v x + X_y \cos v y + X_z \cos v z + v_v g_x, \\ \mathfrak{T}_y = Y_x \cos v x + Y_y \cos v y + Y_z \cos v z + v_v g_y, \\ \mathfrak{T}_z = Z_x \cos v x + Z_y \cos v y + Z_z \cos v z + v_v g_z, \\ \mathfrak{T}_u = \frac{i}{c} \{-\mathfrak{S}_v + v_v \psi\}. \end{array} \right.$$

Hierbei ist

$$(59) \quad \psi = U_u$$

die Energiedichte, \mathfrak{S} der Strahlvektor und

$$(60) \quad g = \frac{\mathfrak{S}}{c^2} = \frac{i X_u}{c}$$

die elektromagnetische Bewegungsgröße.

Da wir elastische Spannungen gänzlich ausgeschlossen haben, so können wir in völliger Analogie zu dem oben behandelten Fall des Vakuums schließen, daß die Kraft, welche $\mathfrak{T}_x, \mathfrak{T}_y, \mathfrak{T}_z$ als Komponenten hat, nichts anderes ist, als die Kraft des Strahlungsdruckes auf bewegte materielle Flächen.

Die u -Komponente der Viererkraft \mathfrak{T} gibt uns wie immer die energetischen Beziehungen.

Wir können die Kraft des Strahlungsdruckes, gemäß den Bedeutungen von $X_u \dots Z_u$, auch in der Form schreiben:

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{T}_{x,y,z} = \frac{1}{2} (\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{D} v + \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{E} v + \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{B} v + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H} v) \\ \quad - \frac{1}{2} v (\mathfrak{E} \mathfrak{D} + \mathfrak{H} \mathfrak{B}) + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \cdot \mathfrak{B} v + \frac{v v}{c} \mathfrak{B} \right) + v v \cdot g. \end{array} \right.$$

Dieser Ausdruck für die Kraft des Strahlungsdruckes muß sich auch nach den bekannten Methoden¹⁾ aus den oben hergeleiteten Grundgleichungen und dem angegebenen Werte der ponderomotorischen Kraft berechnen lassen, ebenso wie man die oben erörterten Kompatibilitätsbedingungen aus den Grundgleichungen allein bereits ermitteln kann.

Wir erhalten daher aus den Oberflächenintegralen niemals Beziehungen, welche sich nicht schon aus den Gleichungen ableiten ließen, welche das Variationsprinzip aus den Integralen über den Raum Σ liefert.

Indessen erscheint die mühelose Herleitung der Kraft des Strahlungsdruckes, wie sie hier durch unser Prinzip erfolgt ist, nicht ohne Interesse zu sein.

Es sei mir gestattet, auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Planck, für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit, sowie für das während der Bearbeitung stets bewiesene wohlwollende Interesse meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

1) Vgl. z. B. M. Planck, Theorie d. Wärmestrahlung, 2. Abschn. 1. Kap.; W. Meissner, Berliner Diss. 1907.

(Eingegangen 9. Februar 1913.)

5. Quantitative Untersuchungen über
 Koppelungswellen
 mittels des Helmholtzschen Pendelunterbrechers;
 von Ernst Dibbern.

(Auszug aus der Kieler Dissertation.)¹⁾

Der Helmholtzsche Pendelunterbrecher hat in Verbindung mit einem ballistischen Galvanometer mehrfach Verwendung gefunden zur Untersuchung elektrischer Schwingungen. Sein Verwendungsbereich ist allerdings ein ziemlich beschränkter; da die kleinste noch ablesbare Verstellung des beweglichen Schlittens einem Zeitwert von etwa 10^{-6} Sek. entspricht, so können Schwingungen kleinerer Periode als 10^{-4} Sek. nicht genau damit verfolgt werden. Seine Verwendung zur Untersuchung langsamerer Schwingungen ist an sich unbegrenzt; wegen der Schwierigkeit, genügend große einwandfreie Kapazitäten zu erhalten, wird eine Periode von ca. 10^{-3} Sek. die untere Grenze darstellen. Innerhalb des genannten Bereiches ist der Pendelunterbrecher ein sehr brauchbares Instrument, das mit dem Oszillographen den Vorzug gemeinsam hat, daß es direkt die Kurve des interessierenden Vorganges liefert. Gegen diesen hat es den Nachteil, daß der Vorgang sehr häufig reproduziert werden muß, da die einzelnen Kurvenpunkte zeitlich hintereinander aufgenommen werden, wodurch auch das Arbeiten ein sehr mühsames wird; ein großer Vorzug gegen den Oszillographen besteht aber darin, daß eine Deformation der Schwingungskurve durch die Trägheit eines beweglichen Systems hier vollkommen wegfällt. Auch in anderer Beziehung dürfte der Pendelunterbrecher jegliche Art von Oszillographen an Genauigkeit wesentlich übertreffen.

Die bisherigen Messungen mit Anwendung des Pendelunterbrechers²⁾ wurden ausschließlich an einfachen Kondensatorkreisen angestellt zur Bestimmung von Perioden und

1) Der philosophischen Fakultät vorgelegt am 18. November 1912.

2) Eine Literaturzusammenstellung vgl. Dissertation § 1.

Dekrementen. In der vorliegenden Untersuchung diente der Pendelunterbrecher dazu, die Schwingungsvorgänge in magnetisch gekoppelten Kreisen aufzunehmen. Im allgemeinen wird zu diesem Zwecke die Resonanzmethode, d. h. ein indirektes Verfahren angewendet. Ein direktes Verfahren, d. h. ein solches, das unmittelbar die Schwingungskurve ergibt, ist mit quantitativen Resultaten meines Wissens nur von Jones¹⁾, sowie Jones und Roberts²⁾ benutzt worden, welche diese Vorgänge mit Hilfe eines elektrostatischen Oszillographen verfolgt haben. Als schwingende Systeme dienten ihnen die Spulen eines Induktoriums mit Leidener Flaschen im Sekundär- und Papierkondensatoren im Primärkreis; die Versuche geschahen ohne und mit Eisenkern. Da ihr Oszillatator nur auf hohe Spannungen ansprach, konnten nur die Koppelungswellen im Sekundärkreis verfolgt werden. Bei Abwesenheit eines Eisenkernes ergab sich eine leidliche Übereinstimmung der berechneten und beobachteten Kurven, indem zwar die Perioden der Koppelungswellen den berechneten entsprachen, die Dekremente aber viel zu hoch gefunden wurden. Die Abweichungen sind, worauf die Verfasser hinweisen, zum Teil auf Energieverluste im Dielektrikum der Kondensatoren zurückzuführen, teils aber wohl auch auf die unrichtige Bewertung der Spulenwiderstände, für welche die Gleichstromwiderstände eingesetzt wurden. Bei den nachstehend mitgeteilten Versuchen sind durch Verwendung von Luftkondensatoren im Sekundär-, und Glimmerkondensatoren im Primärkreis die dielektrischen Verluste auf ein Minimum herabgedrückt, die effektiven Spulenwiderstände aus Dekrementsbestimmungen der Einzelkreise ermittelt. Infolgedessen wurde eine wesentlich bessere Übereinstimmung der beobachteten und berechneten Kurven erzielt. Die Versuche stellen auch insofern eine Erweiterung gegen die von Jones und Roberts dar, als der Pendelunterbrecher es ermöglicht, auch die Vorgänge im Primärkreis zu verfolgen.

Induziert ein Kondensatorkreis I mit den Konstanten C_1 , L_1 , w_1 auf einen zweiten II (C_2 , L_2 , w_2), so gelten, wenn

1) E. T. Jones, Phil. Mag. 17. p. 28. 1909.

2) E. T. Jones u. D. E. Roberts, Phil. Mag. 22. p. 706. 1911.

die Kapazitäten C_1 und C_2 so groß sind, daß quasistationäre Strömung in beiden vorliegt, für den Potentialverlauf die bekannten Beziehungen

$$\begin{cases} L_1 C_1 \frac{d^2 V_1}{dt^2} - L_{12} C_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} + w_1 C_1 \frac{d V_1}{dt} + V_1 = 0, \\ L_2 C_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} - L_{12} C_1 \frac{d^2 V_1}{dt^2} + w_2 C_2 \frac{d V_2}{dt} + V_2 = 0, \end{cases}$$

wo L_{12} der Koeffizient der gegenseitigen Induktion ist. Die Behandlung dieses Systems gestaltet sich verschieden, je nachdem der Koppelungskoeffizient $\mathfrak{R} = L_{12}/\sqrt{L_1 L_2}$ sehr klein oder mit der Einheit vergleichbar ist. Der hier interessierende zweite Fall ist ausführlich von Drude¹⁾ behandelt worden, wo die Konstanten der partikulären Integrale, deren Summe

$$(D98) \quad \begin{cases} V_1 = A_1 e^{t/y_1} + A_2 e^{t/y_2} + A_3 e^{t/y_3} + A_4 e^{t/y_4}, \\ V_2 = B_1 e^{t/y_1} + B_2 e^{t/y_2} + B_3 e^{t/y_3} + B_4 e^{t/y_4}, \end{cases}$$

worin

$$(D99) \quad \begin{cases} y_1 = \beta - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} + i\tau, & y_2 = \beta - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} - i\tau, \\ y_3 = -\beta - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} + i\tau', & y_4 = -\beta - \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} - i\tau' \end{cases}$$

ist, die Lösungen der Differentialgleichungen darstellen, unter Zugrundelegung der Anfangsbedingung erhalten wurden, daß für $t = 0$ der Primärkondensator auf das zum Überbrücken einer primären Funkenstrecke erforderliche Potential gebracht ist. Bei Verwendung des Pendelunterbrechers geschieht nun die Einleitung des Schwingungsvorganges in der Regel so, daß ein konstanter Strom i_0 , der zuvor die Induktionsspule des Primärkreises durchflossen und den Kondensator belegen von C_1 die Potentialdifferenz $i_0 W_1$ erteilt hatte, wo W_1 der Gleichstromwiderstand der Primärspule ist, unterbrochen wird. Dann sind die Anfangsbedingungen für $t = 0$

$$(J) \quad V_1 = i_0 W_1, \quad -C_1 \frac{d V_1}{dt} = i_0, \quad V_2 = 0, \quad \frac{d V_2}{dt} = 0.$$

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 13. p. 517 u. 534. 1904. In den Rechnungen und Formeln meiner Abhandlung sind die Buchstaben und Bezeichnungen von Drude beibehalten. Gleichungen, die aus der Drude'schen Arbeit entnommen sind, tragen ihre dortige Bezeichnung mit beigefügtem D, deaglichen die von Jones entnommenen, die durch beigefügtes J gekennzeichnet sind.

Jones, für dessen Versuchsanordnung dieselben Anfangsbedingungen vorlagen, hat sich auf die Untersuchung des Potentialverlaufes im Sekundärkreis beschränkt und daher nur die Konstanten B bestimmt. Seine Endformel, zu der er gelangt, ist

$$(J) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_2 = + \frac{L_{12} i_0 \tau}{(\tau^2 - \tau'^2) \cos \delta} e^{-\frac{t}{\tau^2} \left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} - \beta \right)} \cdot \sin \left(\frac{t}{\tau} - \delta \right) \\ \quad - \frac{L_{12} i_0 \tau'}{(\tau^2 - \tau'^2) \cos \delta'} e^{-\frac{t}{\tau'^2} \left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} + \beta \right)} \cdot \sin \left(\frac{t}{\tau'} - \delta' \right). \end{array} \right.$$

Hierin drücken sich die Größen τ , ϑ , δ , β durch die Versuchskonstanten wie folgt aus:

$$\vartheta_1 = \frac{1}{2} w_1 C_1, \quad \vartheta_2 = \frac{1}{2} w_2 C_2,$$

$$\beta = - \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2} \cdot \frac{\tau_1^2 - \tau_2^2}{\tau^2 - \tau'^2},$$

$$\tau_1^2 = L_1 C_1 - \vartheta_1^2, \quad \tau_2^2 = L_2 C_2 - \vartheta_2^2,$$

$$\tau = \frac{1}{2 \pi n}, \quad \tau' = \frac{1}{2 \pi n'},$$

worin die Frequenzen n und n' die Wurzeln der zuerst von Oberbeck²⁾ abgeleiteten Gleichung

$$8 \pi^2 n^2 = \frac{1}{1 - \frac{4 \pi^2}{L_1 C_1}} \left[\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{L_1 C_1} - \frac{1}{L_2 C_2} \right)^2 + \frac{4 \pi^2}{L_1 C_1 L_2 C_2}} \right]$$

bedeuten. Ferner ist

$$\sin \delta = \frac{\hbar}{\tau(\tau - \tau')}, \quad \sin \delta' = \frac{\hbar}{\tau'(\tau - \tau')},$$

worin

$$\hbar = 2 \beta \tau + (\tau - \tau') \left(\vartheta_1 + \vartheta_2 - \frac{2 \beta \tau'}{\tau + \tau'} \right)$$

$$= 2 \beta \tau' + (\tau - \tau') \left(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \frac{2 \beta \tau}{\tau + \tau'} \right) \text{ ist.}$$

In entsprechender Weise habe ich für den Potentialverlauf im Primärkreis die Beziehung abgeleitet³⁾

$$\begin{aligned} V_1 = & \frac{i_0 \tau (\tau'^2 - L_1 C_1)}{(\tau^2 - \tau'^2) C_1 \cos \varepsilon} e^{-\frac{t}{\tau^2} \left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} - \beta \right)} \sin \left(\frac{t}{\tau} - \varepsilon \right) \\ & - \frac{i_0 \tau' (\tau^2 - L_1 C_1)}{(\tau^2 - \tau'^2) C_1 \cos \varepsilon'} e^{-\frac{t}{\tau'^2} \left(\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} + \beta \right)} \sin \left(\frac{t}{\tau'} - \varepsilon' \right), \end{aligned}$$

1) In der Abhandlung von Jones tritt bei V_2 noch der Faktor 2 auf, da dort V_2 eine etwas andere Bedeutung hat als hier, vgl. Diss.

2) A. Oberbeck, Wied. Ann. 55. p. 623. 1895.

3) § 8 der Dissertation.

wobei s und s' gegeben sind durch

$$\sin s = \frac{u_1}{u_2}, \quad \sin s' = \frac{v_1}{v_2},$$

$$u_1 = L_1 C_1 - \tau'^2 + \frac{4 \beta \tau^2 (L_1 C_1 - \tau'^2)}{(\tau^2 - \tau'^2) C_1 W_1} + \frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2 - 2 \beta) L_1}{W_1},$$

$$u_2 = \frac{\tau (L_1 C_1 - \tau'^2)}{C_1 W_1},$$

$$v_1 = L_1 C_1 - \tau^2 + \frac{4 \beta \tau'^2 (L_1 C_1 - \tau^2)}{(\tau^2 - \tau'^2) C_1 W_1} + \frac{(\vartheta_1 - \vartheta_2 + 2 \beta) L_1}{W_1},$$

$$v_2 = \frac{\tau' (L_1 C_1 - \tau^2)}{C_1 W_1}.$$

Die Perioden der Koppelungswellen $2\pi\tau$ und $2\pi\tau'$ lassen sich wieder aus der Oberbeckschen¹⁾ Formel berechnen.

Wie schon eingangs erwähnt, sind für die Größen w_1, w_2 , wo Jones die Gleichstromwerte verwendete, die effektiven Widerstände einzusetzen. Bestimmt man diese, indem man die Dekremente der ungekoppelten Systeme einzeln bestimmt und daraus die effektiven Widerstände berechnet, so trägt man den tatsächlichen Verhältnissen allerdings in weit höherem Maße Rechnung, als dies Jones und Roberts getan haben, ohne ihnen aber ganz gerecht zu werden. Der effektive Widerstand z. B. einer Spule für Wechselstrom der Frequenz n stellt sich bekanntlich²⁾ dar durch

$$W_{\text{eff.}} = W_0 + D n^2,$$

wo W_0 den Gleichstromwiderstand und D eine von der Spulenform und der Bewickelungsart abhängige Konstante bedeuten. Nun treten bei gekoppelten Schwingungskreisen zwei Wellen auf, jeder der Kreise besitzt daher für die kürzere Welle einen größeren effektiven Widerstand als für die längere. Waren die Kreise ursprünglich auf Resonanz abgestimmt, so wird nur bei loser Koppelung, wenn die beiden Frequenzen sehr wenig verschieden sind, der aus der Eigendämpfung jedes Kreises abgeleitete Effektivwiderstand einen passenden Mittelwert darstellen, während bei zunehmender Koppelung die kürzere Welle bei Verwendung dieser Werte, zumal bei der Abhängigkeit von n^2 , zu wenig, die längere zu stark gedämpft

1) A. Oberbeck, l. c.

2) F. Dolezalek, Ann. d. Phys. 12. p. 1143. 1903.

erscheint. Noch weniger dürfte die Verwendung der aus den Eigendämpfungen ermittelten Widerstände erlaubt sein, wenn die Schwingungskreise schon vor der Koppelung sehr verschiedene Schwingungszahlen besaßen.

Es würde nun zwar experimentell keine Schwierigkeiten machen, die Konstante D zu bestimmen etwa durch Variation der Kapazitäten und Messung des Effektivwertes bei verschiedenen Frequenzen, doch ist damit allein nichts gewonnen. Denn wenn man auch auf diese Weise die jeder Welle zukommenden Widerstände berechnen könnte, so fehlen doch die Formeln zur Einsetzung dieser Werte. Bei den Ableitungen dürften die Werte w_1 und w_2 nicht mehr als Konstanten, sondern müßten als Funktionen des gegenseitigen Induktionskoeffizienten auftreten, was die Rechnungen zum mindesten äußerst komplizieren, wahrscheinlich aber undurchführbar machen würde. Es bleiben nun zwei Möglichkeiten, um die Wirkungen dieses rechnerisch nicht berücksichtigten Umstandes möglichst herabzudrücken. Die eine besteht darin, $D n^2$ neben W_0 möglichst klein zu machen, was bei kleinem W_0 nur bei einlagigen Spulen möglich ist, oder W_0 durch Zufügen von Skineffektfreiem Widerstand hinreichend zu vergrößern. Eine zweite Möglichkeit ist, die Koppelung der beiden Kreise nicht über einen gewissen kleinen Betrag zu bringen; doch beschränkt sich dieses zweite Mittel überhaupt nur auf abgestimmte Kreise.

Bei meiner Versuchsanordnung ist praktisch das erste Mittel zur Verwendung gekommen. Aus der Theorie folgt, daß für die Dämpfung der Koppelungswellen die Dämpfungs faktoren beider Kreise maßgebend sind. Die Primärspule war zwar nicht einlagig, wies aber immerhin noch keine bedeutende Widerstandsvermehrung auf. Da nun die Primärkapazität C_1 stets sehr groß, die Sekundärkapazität C_2 hingegen sehr klein war, so war für den Dämpfungs faktor das Glied $C_1 w_1$, das weniger von der Frequenz abhing als $C_2 w_2$, vorwiegend bestim mend für die Größe des Dekrementes, und die großen Verschiedenheiten, die w_2 für die Koppelungswellen besaß, fielen weniger ins Gewicht. Obwohl also die Widerstands vermehrung durch Skineffekt solche Beträge annahm, daß ihre völlige Vernachlässigung neben dem Gleichstromwiderstand unzulässig gewesen wäre, so kam doch die Verschiedenheit des

effektiven Widerstandes für die beiden Koppelungswellen nicht merklich in Betracht.

Neben den Messungen ohne Eisenkern, die natürlich zum Vergleich der Beobachtungen mit der Theorie den meisten Wert besitzen, schien es in mancher Beziehung interessant zu sein, auch die Versuche von Jones und Roberts mit Eisenkernen zu wiederholen. Mittels solcher Kerne ist es möglich, natürlich unter gleichzeitiger Veränderung der induktiven Konstanten, den Koppelungsgrad ganz wesentlich zu vergrößern. Ein Vergleich der Beobachtungen mit der Theorie erscheint hier prinzipiell nicht zulässig, da in letzterer einer variablen Permeabilität μ nicht Rechnung getragen ist. Bei Jones und Roberts lagen die Verhältnisse, unter diesem Gesichtspunkt betrachtet, günstiger, da wegen der starken Ströme im Primärkreis — bis zu 9 Amp. — ein annähernd konstanter Mittelwert vorhanden gewesen sein muß.¹⁾ Der Pendelunterbrecher erlaubt nur die Verwendung sehr schwacher Ströme; man arbeitet daher bei Verwendung von Eisenkernen in einem Gebiete, wo μ stark variabel ist, und kann daher gar keine Übereinstimmung erwarten, auch wenn man die induktiven Größen, sowie die effektiven Widerstände mit Schwingungen bestimmt hat. Immerhin erscheint es nicht ohne Interesse, gerade die Deformation der Kurven durch die Wirkung des Eisens zu beobachten.

Aber auch bei schwachen Strömen schien eine Möglichkeit vorzuliegen, Kerne höherer Permeabilität anzuwenden, die trotzdem der Forderung der Konstanz von μ entsprechen. Kerne, die durch Einführen von feinem Eisenpulver in geschmolzenes Paraffin hergestellt sind, besitzen zwar keine sehr große Permeabilität — μ ca. gleich 2 bis 4 —, doch erweist sich dieselbe als praktisch unabhängig von der Intensität und auch der Frequenz²⁾ der magnetisierenden Kraft; dabei ist der Energieverlust in denselben ein ziemlich geringer. Es war daher anzunehmen, daß bei Verwendung eines derartigen Kerns noch eine befriedigende Übereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Potentialkurven zu erhalten wäre.

1) Vgl. Diss.

2) J. Zenneck, Elektromagnetische Schwingungen und drahtlose Telegraphie p. 490.

Die Versuchsanordnung zur Verfolgung der Koppelungs-Wellen ist im wesentlichen dieselbe, die bei der Aufnahme von Schwingungskurven in einfachen Kondensatorkreisen verwendet wird, und ist in Fig. 1 veranschaulicht.

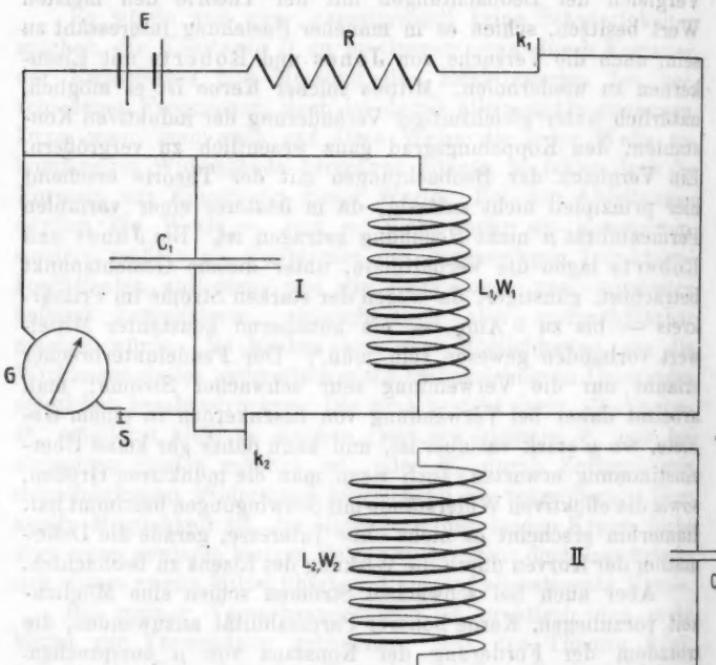


Fig. 1.

C_1 ist der Kondensator des Primärkreises I, L_1 der Selbst-induktionskoeffizient und W_1 der Widerstand der Primärspule, C_2 , L_2 , W_2 sind die entsprechenden Größen für den Sekundärkreis II. E bedeutet eine konstante EMK., R einen Regulier-widerstand, mittels derer ein konstanter Strom i_0 durch die Primärspule hergestellt wird. k_1 und k_2 sind zwei Öffnungs-kontakte, die durch den Pendelunterbrecher betätigt werden können. Je nachdem Koppelungswellen im Primär- oder Sekun-därkreis untersucht werden sollten, lag k_3 in I bzw. II, und entsprechend war das ballistische Galvanometer G unter

Zwischenschaltung eines Schlüssels S der Kapazität C_1 bzw. C_2 parallel geschaltet.

Durch den Pendelunterbrecher wird zuerst k_1 geöffnet; in diesem Zeitmoment setzen die Schwingungen in beiden Kreisen ein, indem C_1 sich durch L_1 entlädt, dabei auf Kreis II induziert, der seinerseits zurückwirkt. Nach einer bestimmten kurzen Zeit, die durch den Kontaktabstand am Pendelunterbrecher festgelegt ist, wird k_2 geöffnet; hierauf wird C_1 durch Schließen von S entladen. Da G auf Mikrocoulomb geeicht, C_1 in Mikrofarad bekannt ist, erhält man das Potential V_1 zur Zeit der Öffnung von k_2 direkt in Volt. Durch Variieren des Abstandes zwischen k_1 und k_2 kann man den zeitlichen Potentialverlauf auf C_1 über einen so großen Bereich verfolgen, als es zur Prüfung der Gleichungen wünschenswert ist. Auf diese Weise werden die Koppelungswellen im Primärkreis aufgenommen. Zur Untersuchung der sekundären Koppelungswellen wird k_2 in Kreis II geschaltet, sowie G parallel zu C_2 ; dabei wird Kreis I dauernd geschlossen gehalten.

Will man die Eigendekemente der Kreise I und II ohne Koppelung zwecks Ermittelung der Effektivwiderstände erhalten, so braucht die Anordnung nur wenig umgestaltet zu werden. Die ungestörte Eigenschwingung von I ergibt sich natürlich sofort, wenn man in der erstgenannten Schaltung den Kreis II vollkommen entfernt. Um auch die Eigenschwingung von II zu bekommen, wird wieder die zweite Schaltung mit k_2 in II, G parallel C_2 getroffen, aus I aber der Kondensator C_1 entfernt. Wird nun k_1 geöffnet, so induzieren die von L_1 herrührenden Kraftlinien bei ihrem Verschwinden in L_2 eine EMK., die C_2 auflädt; eine Rückwirkung zwischen L_1 und L_2 während des Schwingungsvorganges in II findet aber nicht statt, da L_1 ungeschlossen ist.

Von den verwendeten Apparaten sollen hier nur die Selbstinduktionsspulen besprochen werden; bezüglich des Pendelunterbrechers, der Kondensatoren usw. sei auf die Dissertation verwiesen.

Im Sekundärkreis wurde die Sekundärspule eines kleinen 5 cm-Funkeninduktors von Boas (P. L. 520) verwendet, aus dem die Primärspule mit Eisenkern entfernt war. An deren

Stelle wurde als Selbstinduktion für den Primärkreis eine auf ein 24 mm weites Glasrohr gewickelte 18 cm lange Spule verwendet. Der in 1760 Windungen aufliegende Draht von 0,46 mm Durchmesser war doppelt mit Seide umsponten; jede der acht Lagen war nach dem Wickeln mit heißem Paraffin durchtränkt worden. Der Selbstinduktionskoeffizient der Sekundärspule ergab sich in der Brücke gegen eine Normale von 1 Henry gemessen zu 3,327 Henry, ihr Widerstand betrug bei 18° 959,2 Ohm. Der Widerstand der Primärspule bei gleicher Temperatur war 12,77 Ohm, der Selbstinduktionskoeffizient mit einer 0,1 Henry-Normale verglichen 0,01413 Henry. Die Primärspule konnte in einer festen Führung verschieden tief in die sekundäre eingeschoben werden, wobei ihre Stellung durch einen Maßstab mit Zeiger festgelegt war.

Über die bei einem Teil meiner Versuche eingebrachten drei Eisenkerne ist folgendes zu bemerken. Der eine, Kern *a*, war hergestellt durch Einröhren von möglichst vielem Eisenpulver in geschmolzenes Paraffin; die geschmolzene Masse wurde in einer Glasröhre von 18,2 cm Länge und 1,7 cm innerer Weite erstarren lassen. Kern *b* bestand aus 630 Stück gut schellackierten Blumendrahts von 0,43 mm Durchmesser, die ebenfalls durch ein passendes Glasrohr zusammengehalten wurden, Länge des Kerns 19,2 cm. Der massive Kern *c*, aus sogenanntem Atlasstahl, war einmal in Holzkohlenfeuer gut ausgeglüht und langsam abgekühlt worden. Seine Länge war 19,8 cm, der Durchmesser 1,80 cm. Zwecks konzentrischer Einführung in die Primärspule war er von einem genügend starkwandigen Glasrohr umgeben. Um einen Anhalt darüber zu gewinnen, wie sehr die Permeabilität dieser Kerne von der Intensität des magnetisierenden Feldes abhing, wurden sie in der Primärspule verschiedenen magnetisierenden Kräften ausgesetzt und die Erhöhung des Induktionsflusses gegenüber dem ohne Kern in bekannter¹⁾ Weise durch Abziehen einer kleinen mit dem ballistischen Galvanometer verbundenen Induktionsspule bestimmt; der dabei verwendete Stromstärkenbereich war etwa derselbe, wie er bei den Schwingungsversuchen die Primärspule durchfloss. Die Resultate dieser Messungen sind

1) F. Kohlrausch, Praktische Physik 11. Aufl. § 115. II.

in den drei Kurven *a*, *b*, *c* (Fig. 2) enthalten, in denen als Abszissen die magnetisierenden Stromstärken, als Ordinaten die Verhältnisse der induzierten Ausschläge mit zu denen ohne Kern aufgetragen sind.¹⁾

Die Permeabilität der Kerne kann aus diesen Versuchen natürlich nicht ermittelt werden, da der magnetische Kreis

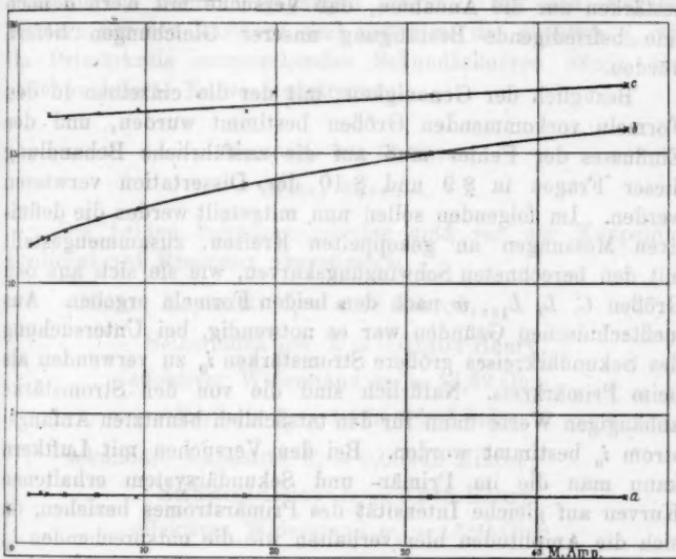


Fig. 2.

nicht durch Eisen geschlossen ist; außerdem ist der entmagnetisierende Faktor für Kern *a* und *b* hier eine nicht definierbare Größe. Dagegen ergeben die Ordinaten der Kurven direkt die Erhöhung des Selbstinduktionskoeffizienten²⁾ der Primärspule durch Einführung des Kernes. Aus den Kurven folgt daher, daß der Kern aus Eisenpulver den Selbstinduktionskoeffizienten der Spule etwa verdoppelt; die Abhängigkeit des Faktors von der Stromstärke ist dabei jedenfalls sehr klein.

1) Die hier dargestellten Versuche, die nur orientierender Art sind, um den Einfluß der Intensität festzustellen, beanspruchen keine große Genauigkeit.

2) Wenigstens in erster Annäherung.

Der Kern b aus Eisendraht liefert einen Faktor, dessen Werte zwischen 12 und 16 liegen, und weist die größte Abhängigkeit von i auf. Wieder geringer wird diese bei dem massiven Kern c , der dabei die größte Erhöhung des Selbstinduktionskoeffizienten liefert. Natürlich gelten die mit Gleichstrom gefundenen Resultate nicht ohne weiteres für Schwingungen; sie bestärken nur die Annahme, daß Versuche mit Kern a noch eine befriedigende Bestätigung unserer Gleichungen liefern würden.

Bezüglich der Genauigkeit, mit der die einzelnen in den Formeln vorkommenden Größen bestimmt wurden, und des Einflusses der Fehler muß auf die ausführliche Behandlung dieser Fragen in § 9 und § 10 der Dissertation verwiesen werden. Im folgenden sollen nun mitgeteilt werden die definitiven Messungen an gekoppelten Kreisen, zusammengestellt mit den berechneten Schwingungskurven, wie sie sich aus den Größen C , L , L_{12} , w nach den beiden Formeln ergeben. Aus meßtechnischen Gründen war es notwendig, bei Untersuchung des Sekundärkreises größere Stromstärken i_0 zu verwenden als beim Primärkreis. Natürlich sind die von der Stromstärke abhängigen Werte dann für den tatsächlich benutzten Anfangstrom i_0 bestimmt worden. Bei den Versuchen mit Luftkern kann man die im Primär- und Sekundärsystem erhaltenen Kurven auf gleiche Intensität des Primärstromes beziehen, da sich die Amplituden hier verhalten wie die entsprechenden i_0 . Bei den Eisenkernen ist dies nicht mehr erlaubt, da schon beim Kern aus Eisenpulver die Abhängigkeit der Effektivwiderstände von i_0 eine zu große ist.

Es werden hier die zeitlichen Nullwerte des Potentials sowie die Gipfel zahlenmäßig in Tabellen dargestellt, erstere in 10^{-4} Sek., letztere in Millivolt für den Primär-, in Volt für den Sekundärkreis; zum Vergleich befinden sich die nach den Formeln berechneten Werte daneben. In den Kurven, die den ganzen Schwingungsverlauf veranschaulichen, sind als Ordinaten nicht die Potentiale, sondern die den Elektrizitätsmengen proportionalen Galvanometerausschläge aufgetragen. Dies geschah, um auf ein und demselben Blatt Primär- und Sekundärverlauf gleichzeitig darzustellen, ohne zweierlei Einheiten für die Ordinaten verwenden zu müssen. Die Abszissen

sind für beide Schwingungssysteme dieselben, so daß ein Kurvenblatt die zeitlich korrespondierende Elektrizitätsbewegung in beiden Kreisen enthält. Allerdings entsprechen die Ordinaten des Sekundärsystems einem größeren i_0 als die primären; dies mußte auch graphisch beibehalten werden, da sonst die sekundären Ordinaten zu klein ausgefallen, wodurch Einzelheiten verloren gegangen wären. Bei den Kurvenblättern für den Luftkern sind außerdem die gleichen i_0 wie im Primärkreis entsprechenden Sekundärkurven durch eine strichpunktiierte Kurve eingetragen.

Versuche mit Luftkern.

Erster Versuch.

Die beiden Schwingungskreise sind vor der Koppelung tunlichst auf Resonanz abgestimmt:

primäre Kapazität $C_1 = 2,28$ Mikrof.,

Selbstinduktion $L = 0,01404$ Henry,

effektiver Widerstand $w_1 = 13,62$ Ohm,

Periode $T_1 = 1,120 \cdot 10^{-3}$ Sek.;

sekundäre Kapazität $C_2 = 0,00943$ Mikrof.,

Selbstinduktion $L_2 = 3,245$ Henry,

effektiver Widerstand $w_2 = 1680$ Ohm,

Periode $T_2 = 1,098 \cdot 10^{-3}$ Sek.;

gegenseitiger Induktionskoeffizient $L_{12} = 0,09574$ Henry,

Koppelungsfaktor $R = 0,4486$.

Bei Untersuchung des Primärkreises war

$i_0 = 2,478$ Milliamp.,

bei Untersuchung des Sekundärkreises war

$i_0 = 42,41$ Milliamp.

Dann berechnet sich der Potentialverlauf im Primärkreis durch

$$V_1 = -68,04 e^{-676 \cdot t} \sin(7615 \cdot t - 4^\circ 56' 10'')$$

$$- 124,4 e^{-202 \cdot t} \sin(4695 \cdot t - 12^\circ 15' 55'')$$

und im Sekundärkreis durch

$$V_2 = -19,30 e^{-678 \cdot t} \sin(7615 \cdot t - 9^\circ 57' 34'') + 30,96 e^{-262 \cdot t} \sin(4695 \cdot t - 6^\circ 7' 20'') \text{ Volt.}$$

Den Vergleich der berechneten und beobachteten Potentialgipfel und Nullwerte gibt nachstehende

Tabelle 1.

Primärkreis.				Sekundärkreis.			
Potentialgipfel in Millivolt		Null- werte $\cdot 10^4$		Potentialgipfel in Volt		Null- werte $\cdot 10^4$	
ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.
-151,9	-146,1	0,35	0,35	+27,79	+27,25	0	0
+ 61,3	+ 58,2	6,20	6,16	-32,99	-32,69	7,55	7,50
- 89,5	- 85,2	14,50	14,67	+21,85	+21,59	13,25	13,15
+ 78,7	+ 78,8	20,52	20,52	-18,82	-12,73	19,84	19,78
- 48,4	- 41,0	26,80	26,80	+15,98	+15,69	27,45	27,45
+ 47,3	+ 46,3	34,10	33,90	-12,41	-12,19	33,56	33,45
		40,80	40,80			40,20	40,05

Die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Werten ist für die Nullwerte eine sehr gute, bedeutend weniger für die Potentialgipfel; es erklärt sich dies leicht aus dem Einfluß, den Unsicherheiten der Phasenwinkel bewirken.¹⁾ Indessen ist sie auch hier viel besser als bei Jones. Besonders stark sind die Abweichungen beim vierten sekundären und fünften primären Gipfel.

Um beide Kreise auf gleiches i_0 zu beziehen, sind die sekundären Potentialgipfel mit $2,478/42,41 = 0,05843$ zu multiplizieren; das maximale sekundäre Potential würde dann nicht -32,7, sondern -1,91 Volt betragen. Wollte man die beiden Systeme zusammen als Spannungstransformator betrachten, so wäre das Transformationsverhältnis nur etwa gleich 13, also sehr klein. Dieser geringe Wert des Übersetzungsverhältnisses, der natürlich nicht dem Verhältnis der Windungszahlen entspricht, erklärt sich ungezwungen aus der geringen Eigenkapazität der Sekundärspule. Infolgedessen wird durch

1) Vgl. Dissertation.

die angehängten Luftkondensatoren das sekundäre Potential außerordentlich stark herabgedrückt.

Das zu Tab. 1 gehörige Kurvenblatt 3 ermöglicht auch einen besseren Vergleich des beobachteten und berechneten Schwingungsverlaufes. Die beobachtete Kurve ist ausgezogen, die berechneten gestrichelt. Die berechneten Punkte sind für

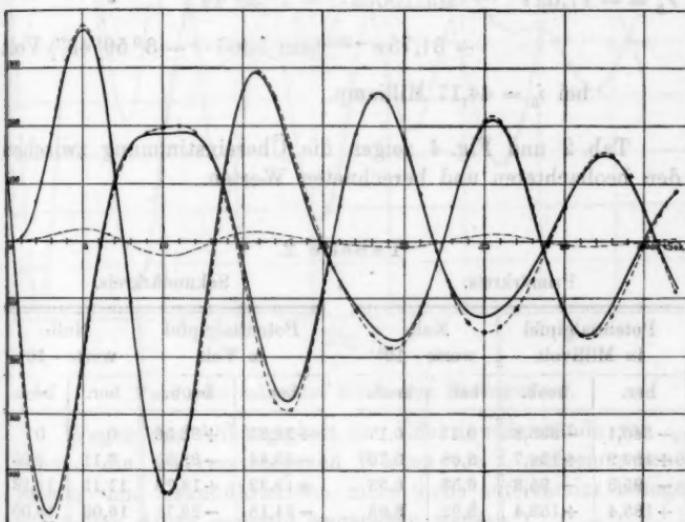


Fig. 8.

den Primärkreis durch Kreuze, für den Sekundärkreis durch Kreise angedeutet. Die auf gleiches i_0 bezogene Sekundärkurve ist strichpunktiert.

Zweiter Versuch.

Die beiden Kreise wurden durch Verkleinern von C_1 auf 1 Mikrof. stark gegeneinander verstimmt, so daß T_1 jetzt $= 7,446 \cdot 10^{-4}$ wurde. Dadurch erhielten die Perioden der Koppelungswellen die Werte

$$T = 6,244 \cdot 10^{-4} \text{ und } T' = 1,172 \cdot 10^{-3} \text{ Sek.}$$

Der berechnete Schwingungsverlauf wird ausgedrückt durch

$$V_1 = -300,5 e^{-693 \cdot t} \sin(10063 \cdot t - 7^\circ 50' 30'')$$

$$- 112,5 e^{-222 \cdot t} \sin(5363 \cdot t - 2^\circ 43' 54'') \text{ MV.}$$

bei $i_0 = 3,60$ Milliamp.;

$$V_2 = -17,02 e^{-698 \cdot t} \sin(10063 \cdot t - 7^\circ 30' 44'')$$

$$+ 31,75 e^{-222 \cdot t} \sin(5363 \cdot t - 3^\circ 59' 43'') \text{ Volt}$$

bei $i_0 = 44,17$ Milliamp.

Tab. 2 und Fig. 4 zeigen die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Werten.

Tabelle 2.

Primärkreis.

Sekundärkreis.

Potentialgipfel in Millivolt		Null- werte $\cdot 10^4$		Potentialgipfel in Volt		Null- werte $\cdot 10^4$	
ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.
- 346,1	- 335,8	0,17	0,17	+ 34,25	+ 33,56	0	0
+ 159,9	+ 154,7	3,68	3,70	- 33,44	- 33,35	6,12	6,05
- 95,8	- 95,8	6,58	6,58	+ 19,32	+ 18,73	11,15	11,13
+ 183,4	+ 183,4	8,92	8,93	- 24,15	- 23,78	18,00	18,00
- 189,9	- 189,9	12,40	12,42	+ 15,08	+ 14,22	23,30	23,20
+ 85,0	+ 85,0	16,28	16,28	- 17,09	- 16,56	29,65	29,65
- 4,9	- 7,1	20,02	19,82	+ 18,15	+ 12,57	35,18	35,07
+ 71,5	+ 72,9	20,77	20,84			41,14	41,14
- 110,6	- 110,6	24,58	24,55				
+ 61,9	+ 61,9	28,70	28,66				
+ 18,2	+ 18,7	36,20	36,22				
+ 19,8	+ 20,3	40,90	40,84				
- 63,8	- 63,8						

Die Übereinstimmung ist bei diesem Versuch auch für die Potentialgipfel eine recht befriedigende. Auf gleiches i_0 wie im Primärkreis bezogen wird das maximale sekundäre Potential = 2,74 Volt, das Übersetzungsverhältnis etwa 8,2, also kleiner als im Resonanzfalle, wie zu erwarten war.

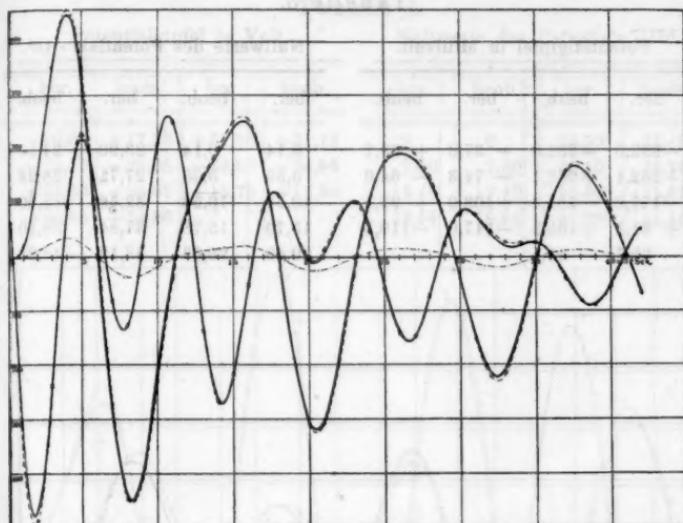


Fig. 4.

Versuche mit dem Kern aus Eisenpulver.

Wegen der Abhängigkeit der Effektivwiderstände von i_0 ¹⁾ können die bei verschiedenen Werten von i_0 aufgenommenen Primär- und Sekundärkurven nicht mehr aufeinander bezogen und sollen daher getrennt angegeben werden.

Versuch bei angenäherter Resonanz.

Versuch im Primärkreis.

$$C_1 = 1,0 \text{ Mikrof.}; \quad L_1 = 0,0278, \text{ H.};$$

$$C_2 = 0,00943 \text{ Mikrof.}; \quad L_2 = 3,503 \text{ H.};$$

$$w_1 = 13,40 \Omega; \quad T_1 = 1,048 \cdot 10^{-3} \text{ Sek.}$$

$$w_2 = 1693 \Omega; \quad T_2 = 1,141 \cdot 10^{-3} \text{ Sek.}$$

$$i_0 = 2,20 \text{ Milliamp.}; \quad L_{12} = 0,0674, \text{ H.}; \quad R = 0,216.$$

$$V_1 = -231,3 e^{-304 \cdot t} \sin(6535 \cdot t - 6^\circ 6' 40'') \\ - 184,8 e^{-302 \cdot t} \sin(5165 \cdot t - 1^\circ 32' 0'') \text{ MV.}$$

1) Vgl. Dissertation.

Tabelle 3.

Potentialgipfel in Millivolt.

Nullwerte des Potentials $\cdot 10^4$.

ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.
- 332,0	- 332,0	+ 37,8	+ 38,7	0,14	0,14	23,90	24,50
+ 262,1	+ 262,1	- 74,3	- 64,0	5,35	5,35	27,72	28,28
- 175,2	- 181,3	+ 108,0	+ 92,5	10,56	10,56	32,56	32,90
+ 91,1	+ 105,5	- 117,0	- 110,5	15,70	15,78	37,84	38,10
- 35,7	- 49,5			20,49	20,68	43,12	43,28

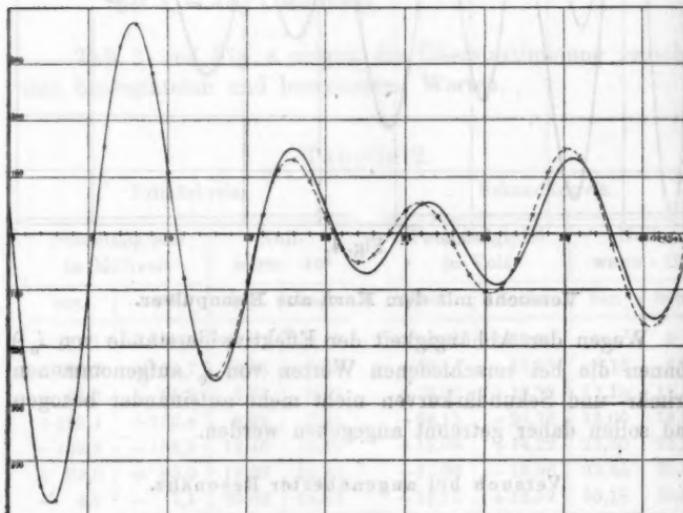


Fig. 5.

Versuch im Sekundärkreis.

 $i_0 = 38,03$ Milliamp.; dadurch werden $L_1 = 0,02883$ H.; $w_1 = 15,52$ Ω ; $T_1 = 1,067 \cdot 10^{-3}$ Sek.,

die übrigen Konstanten wurden nur unmerklich geändert.

$$V_2 = - 29,06 e^{-326 \cdot t} \sin (6448 \cdot t - 5^\circ 42' 45'')$$

$$+ 36,37 e^{-200 \cdot t} \sin (5143 \cdot t - 4^\circ 33' 14'')$$
 Volt.

Tabelle 4.

Potentialgipfel in Volt.

Nullwerte des Potentials $\cdot 10^4$.

ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.
+20,06	+17,86	+31,88	+31,19	0	0	24,59	24,45
-32,10	-29,28	-24,52	-24,96	7,80	7,80	30,10	29,96
+37,60	+34,67	+15,75	+17,56	18,43	18,43	35,90	35,62
-36,85	-34,86			18,94	18,94	41,95	41,46

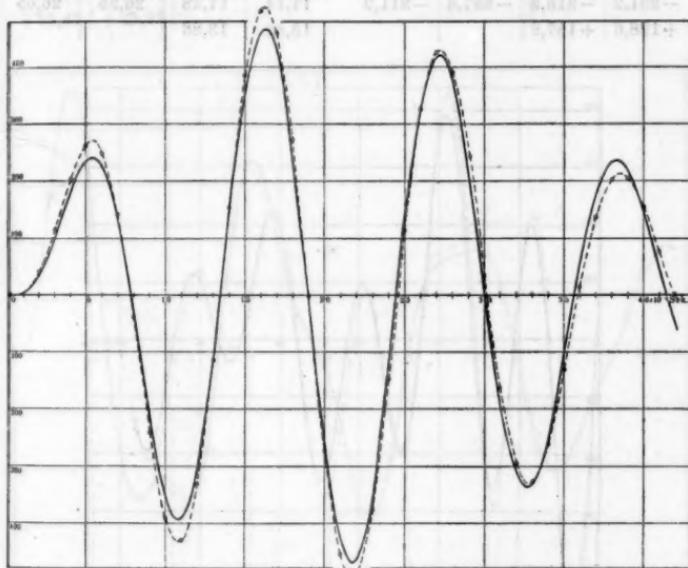


Fig. 6.

Durch Verkleinern von C_1 auf 0,436 Mikrof. wurden die Kreise gegeneinander verstimmt, zugleich auch stärker gekoppelt.

Versuch im Primärkreis.

$$i_0 = 4,384 \text{ Milliamp.};$$

$$L_1 = 0,2794 \text{ H.}; \quad w_1 = 14,29 \Omega; \quad T_1 = 6,933 \cdot 10^{-4} \text{ Sek.},$$

$$L_2 = 3,795 \text{ H.}; \quad w_2 = 1786 \Omega; \quad T_2 = 1,189 \cdot 10^{-3} \text{ Sek.},$$

$$L_{12} = 0,1854 \text{ H.}; \quad R = 0,569.$$

$$V_1 = -732,1 e^{-545 \cdot t} \sin(11760 \cdot t - 5^\circ 16' 15'')$$

$$- 800,2 e^{-187 \cdot t} \sin(4955 \cdot t + 2^\circ 5' 42'') \text{ MV.}$$

Tabelle 5.

Potentialgipfel in Millivolt.

ber.	beob.	ber.	beob.
-876,9	-754,7	-440,5	-398,4
+347,8	+322,9	+369,8	+368,2
-464,7	-417,1	-25,7	-65,9
+688,1	+629,1	+191,3	+186,2
-331,2	-316,8	-337,6	-311,9
+128,6	+157,6		

Nullwerte des Potentials $\cdot 10^4$.

ber.	beob.	ber.	beob.
0,14	0,14	15,45	15,77
3,13	3,16	18,83	19,00
5,25	5,35	22,42	22,42
7,84	7,92	23,85	23,90
11,14	11,28	26,35	26,65
13,82	13,86		

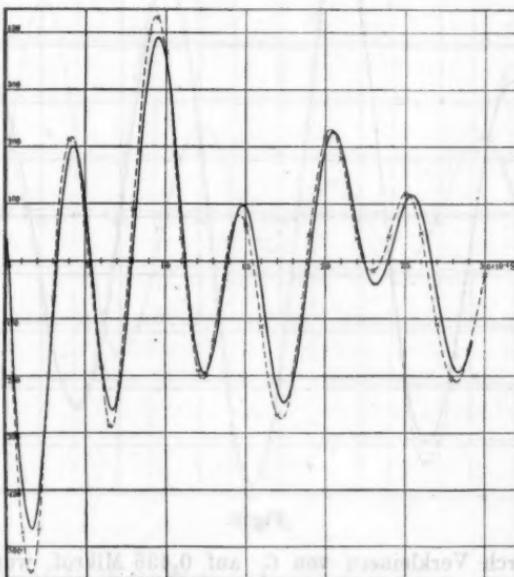


Fig. 7.

Versuch im Sekundärkreis.

$i_0 = 25,97$ Milliamp.; die übrigen Konstanten wurden kaum beeinflußt.

$$V_3 = -12,25 e^{-543 \cdot t} \sin(11760 \cdot t - 4^\circ 10' 8'') + 29,02 e^{-187 \cdot t} \sin(4955 \cdot t - 1^\circ 45' 9'') \text{ Volt.}$$

Tabelle 6.

Potentialgipfel in Volt.

ber.	beob.	ber.	beob.
+ 35,22	+ 35,16	- 22,14	- 21,82
- 18,72	- 18,99	+ 15,60	+ 18,42
- 16,79	- 15,97	- 15,60	- 15,54
- 20,06	- 18,74	+ 14,71	+ 18,86
+ 25,41	+ 25,37		

Nullwerte des Potentials $\cdot 10^4$.

ber.	beob.	ber.	beob.
0	0	25,07	25,20
6,00	6,00	31,86	32,00
18,00	18,14	38,40	38,46
19,40	19,40		

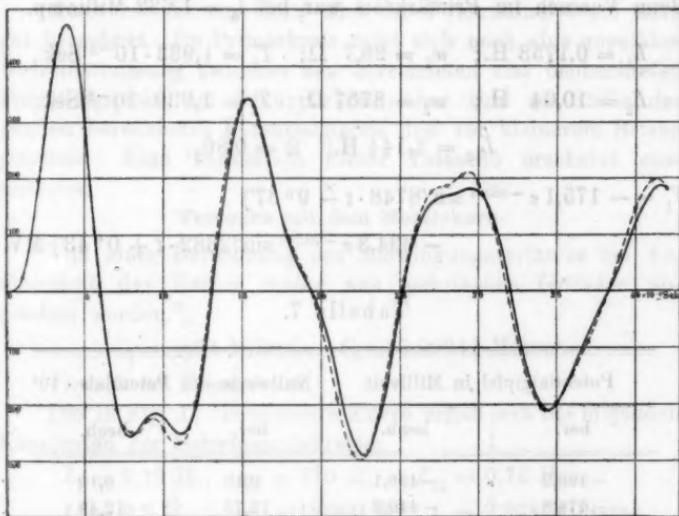


Fig. 8.

Zusammenfassend ist bezüglich der Versuche mit diesem Kern zu bemerken, daß die Übereinstimmung der berechneten und beobachteten Nullwerte noch eine befriedigende ist, entsprechend dem Umstande, daß die Selbstinduktionskoeffizienten hier noch nahe als konstant angesehen werden dürfen und mit guter Genauigkeit bestimmt werden konnten. Die berechneten Potentialgipfel stimmen weniger gut mit den beobachteten als bei den Versuchen mit Luftkern. Hier macht sich, wie zu erwarten, der mit i_0 variable effektive Widerstand, der durch

Hysterese vergrößert ist, offenbar bemerklich. Da auch dieser sich den beiden Koppelungswellen gegenüber verschieden verhalten wird, sind die Verhältnisse hier, und ebenso beim Drahtkern, noch viel komplizierter als beim Luftkern.

Versuche mit dem Drahtkern.

Es wurde nur der Fall angenäherter Resonanz untersucht:

$$C_1 = 0,54 \text{ Mikrof.}; \quad C_2 = 0,00943 \text{ Mikrof.}$$

Beim Versuch im Primärkreis war bei $i_0 = 1,632$ Milliamp.

$$L_1 = 0,1753 \text{ H.}; \quad w_1 = 26,7 \Omega; \quad T_1 = 1,933 \cdot 10^{-3} \text{ Sek.}$$

$$L_2 = 10,04 \text{ H.}; \quad w_2 = 3757 \Omega; \quad T_2 = 1,930 \cdot 10^{-3} \text{ Sek.},$$

$$L_{12} = 1,144 \text{ H.}; \quad \Omega = 0,86_2.$$

$$V_1 = -175,1 e^{-953 \cdot t} \sin(8748 \cdot t - 9^{\circ} 37')$$

$$- 634,3 e^{-70,7 \cdot t} \sin(2382 \cdot t + 0^{\circ} 43') \text{ MV.}$$

Tabelle 7.

Potentialgipfel in Millivolt		Nullwerte des Potentials $\cdot 10^4$	
ber.	beob.	ber.	beob.
-496,9	-496,1	0,10	0,10
-474,8	-440,2	12,75	12,49
-604,8	-619,8	26,40	26,50
+579,9	+600,2	39,50	39,65
-500,8	-511,7		

Beim Versuch im Sekundärkreis wurden durch das größere $i_0 = 10,41$ Milliamp. vorwiegend L_1 und w_1 vergrößert zu den Beträgen 0,192 H. bzw. 43,4 Ω ; die übrigen Größen wurden nur unbeträchtlich geändert.

$$V_2 = -9,87 e^{-854 \cdot t} \sin(7575 \cdot t - 13^{\circ} 3' 43'')$$

$$+ 31,05 e^{-90,4 \cdot t} \sin(2351 \cdot t - 4^{\circ} 1' 21'') \text{ Volt.}$$

Tabelle 8.

Potentialgipfel in Volt		Nullwerte des Potentials $\cdot 10^4$	
ber.	beob.	ber.	beob.
+ 35,06	+ 34,82	0	0
	- 23,03	14,1	14,24
- 27,74	- 20,26	27,2	27,0
	- 21,89	40,4	41,0
+ 23,67	+ 22,53		

Auch bei diesem Kern sind die Potentialnullwerte noch gut berechnet. Im Primärkreis zeigt sich noch eine ungefähre Übereinstimmung zwischen den berechneten und beobachteten Potentialgipfeln, im Sekundärkreis aber sind an Stelle des zweiten berechneten Potentialgipfels drei von kleinerem Betrag getreten. Eine Diskussion dieser Tatsache erscheint aussichtslos.

Versuche mit dem Massivkern.

Von einer Berechnung des Schwingungsverlaufes bei Anwesenheit des Kernes mußte aus mehrfachen Gründen abgesehen werden.¹⁾

$$C_1 = 0,64 \text{ Mikrof.}; \quad C_2 = 0,00943 \text{ Mikrof.}$$

Versuch im Primärkreis.

Die in Fig. 11 dargestellte Kurve ergab sich bei folgenden Konstanten der Schwingungskreise:

$$L_1 = 9,12 \text{ H.}; \quad w_1 = 270 \Omega; \quad L_{12} = 0,76 \text{ H.},$$

$$L_2 = 6,8 \text{ H.}; \quad w_2 = 12000 \Omega; \quad i_0 = 2,268 \text{ Milliamp.}$$

Sämtliche Werte mit Ausnahme von C_1 , C_2 , i_0 sind als rohe Annäherungen zu betrachten.

Versuch im Sekundärkreis.

Mit der Verstärkung von i_0 auf 15,08 Milliamp. trat keine merkliche Veränderung in den Konstanten auf.

Es scheint bei Betrachtung der experimentell aufgenommenen Kurven nicht möglich zu sein, aus ihnen Rückschlüsse auf die komplizierten Vorgänge ziehen zu können. Bei dem Vergleich beider Kurven fällt jedoch auf, daß der Primärkreis

1) Vgl. Dissertation.

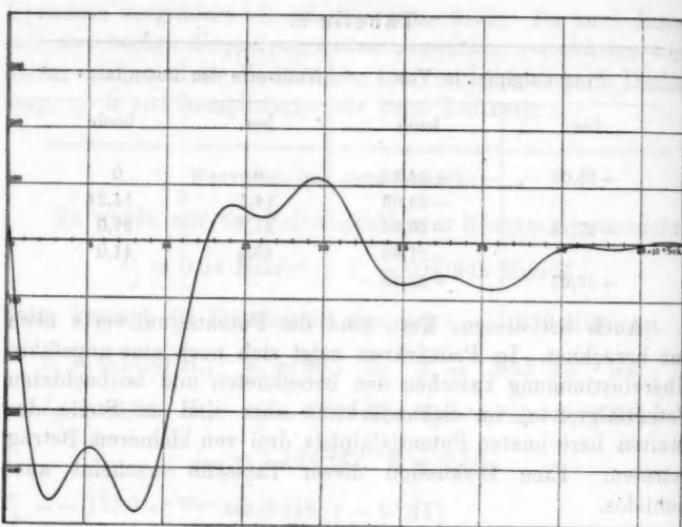


Fig. 9.

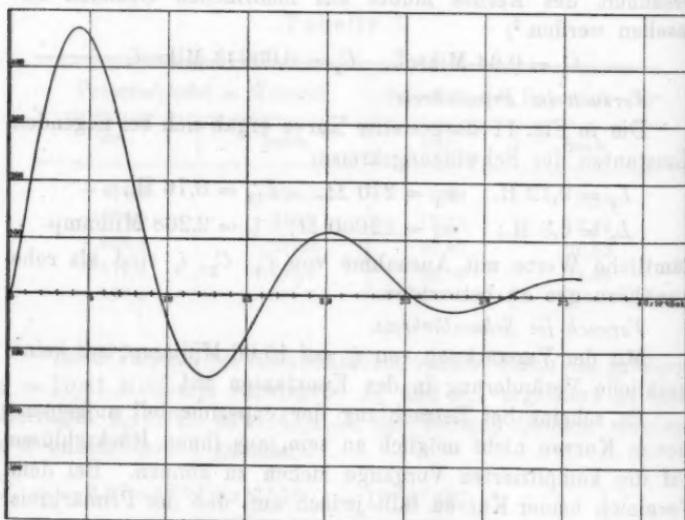


Fig. 10.

stets ausgesprochene Doppelgipfel besitzt, die dem Sekundärkreis fehlen. Dadurch gewinnt man den Eindruck, daß im Sekundärkreis ein Wellensystem offenbar überwiegt. Diese Deutung gewinnt an Wahrscheinlichkeit, wenn man bedenkt, daß der Primärkreis stärker¹⁾ gedämpft ist als der sekundäre. Man nähert sich hier vielleicht etwas dem Falle der Stoß-erregung, indem nur das erste Gipfelsystem des Primärkreises relativ hoch ausgebildet ist, so daß schon ein teilweise freies Ausschwingen des Sekundärkreises beginnt. Daß dabei kein konstantes Dekrement auftritt, ist nicht verwunderlich, da selbst ein ungekoppeltes System bei Verwendung des Massivkernes auch nicht entfernt ein solches ergab; die Entladungskurve des ungekoppelten Sekundärkreises fällt fast zusammen mit der Koppelungskurve Fig. 10.

Es lassen sich die Resultate der vorliegenden Arbeit wie folgt zusammenfassen:

Die mit dem Pendelunterbrecher vorgenommenen Messungen des Potentialverlaufes im Primär- und Sekundärsystem ergaben eine gute Bestätigung der theoretisch abgeleiteten Formeln, solange die experimentellen Verhältnisse den Voraussetzungen der Theorie entsprachen. Die Versuche, die nach dem Vorgange von Jones und Roberts durch Einfügen von Eisenkernen in die Induktionsspulen erweitert wurden, ließen sich auch dann noch durch die Formeln leidlich darstellen, solange nicht die Schwankungen der mit der Schwingungsintensität variablen Größen, nämlich der Permeabilität und des Energieverlustes durch Hysterese, einen zu großen Betrag einnahmen. Besonders machte sich der Hysteresisverlust stärker geltend durch eine Beeinflussung der Potentialgipfel, während die Übereinstimmung der berechneten und beobachteten Potentialnullwerte noch auf eine leidliche Konstanz der mittleren Permeabilität schließen ließ. Dies traf zu bei je einem Kern aus Eisenpulver und Eisendraht; bei einem Kern aus Massiveisen lagen die Verhältnisse derart, daß eine theoretische Berechnung der Schwingungskurve überhaupt untrüglich war.

1) $b_1 = 2,0$; $b_2 = 1,4$.

6. *Normale und anomale Zeeman-Effekte.**Nachtrag¹⁾;**von F. Paschen und E. Back.*

(Hierzu Taf. I.)

In unserem früheren Aufsatze haben wir die Gründe angegeben, welche uns erwarten ließen, daß ein sehr enges Seriendublet oder -triplet durch Magnetfelder verändert werde. In dem engen Sauerstofftriplet bei 3947 Å.-E. fanden wir ein deutliches Beispiel einer solchen magnetischen Verwandlung. Aber unsere Überlegung ließ in starkem Felde noch mehr und einfacheres voraussehen. Da mehrere Linien, welche nach den Spektralgesetzen eigentlich sehr enge Dublets oder Triplets sein müßten, wie z. B. die Linien des Lithiums, Sauerstoff 4388 und schließlich auch die Linien zum mindestens des einen der Seriensysteme des Heliums, magnetisch in exakt normale Triplets aufspalten, also sich magnetisch verhalten, wie die wirklich einfachen Linien der „Serien einfacher Linien“, erwarteten wir als Endstadium der nachgewiesenen magnetischen Verwandlung in genügend hohem Felde ein exakt normales Zeemantriplet. Das Magnetfeld würde dabei das Seriendublet oder -triplet in eine einfache Linie verwandelt haben. Wir verstehen nämlich das Verhalten der oben bezeichneten Linien (Li z. B.) durch die Annahme, daß die Licht emittierenden Teile dann einer Art Zwangszustand unterliegen, wenn sie an Stelle einer einfachen Linie ein Seriendublet oder -triplet aussenden. Wenn die Stabilität dieses Zwangszustandes um so geringer ist, je geringer die Schwingungsdifferenz der Komponenten des Serienduplets oder -triplets ist, würde das Verhalten obiger Linien einleuchten. Dann aber sollte erwartet werden, daß die magnetische Verwandlung eines engen

1) Zu der Arbeit F. Paschen u. E. Back, Ann. d. Phys. 39. p. 897. 1912.

Seriendoublets oder -triplets bis zum Auftreten eines exakt normalen Zeemantriplets fortschreitet. Es würde von Wichtigkeit sein, diese Folgerung soweit wie möglich als wahrscheinlich zu erweisen.

Unser Sauerstofftriplet war bei 32000 Gauss so weit verwandelt, daß die parallelen Schwingungen zu einer einzigen ziemlich scharf definierten Linie zusammengeschmolzen erschienen. Die senkrechten Schwingungen bildeten noch ziemlich breite Wische. Es ist der Zweck dieses Nachtrages, die weitere Verwandlung dieses Serientriplets in höheren Feldern zu beschreiben, welche sich tatsächlich so vollzieht, wie wir erwarten.

Weiter haben wir die Wasserstofflinien in höheren Feldern untersucht und glauben, auch bei ihnen eine magnetische Verwandlung beweisen zu können. Durch die Arbeit von H. Buisson und Ch. Fabry¹⁾ ist erwiesen, daß H_α und H_β doppelt sind. Die Komponente größerer Wellenlänge ist die stärkere. Die Balmer-Serie kann danach die I. Nebenserien eines Dublettsystems sein. In diesem Falle sollte allerdings der Endeffekt der Verwandlung das normale Triplet sein. Die Art der Serienverwandtschaft der zwei Komponenten von H_α oder H_β ist indessen nicht völlig sicher. Es könnten auch Kombinationen anderer Art vorliegen. In diesem Falle wäre über die Verwandlung dieser Linien vorläufig nichts vorauszusehen.

Es ist klar, daß man je nach der Verwandtschaft enger Doppellinien sehr verschiedene Arten der Störung zu erwarten hat. Linien, welche überhaupt nicht miteinander verwandt sind, werden sich nicht beeinflussen. Beispiele hierfür scheinen zu sein: Strontium 4876,23 ($2p_2 - 3d''$) und 4876,49 (stärkere Linie, magnetisch ein Triplet $Z = \frac{3}{2}a$). Ferner Strontium 4832,23, neben der noch die schwächere Strontiumlinie 4832,17 liegt. Letztere ist $2p_3 - 3d''$ mit der Aufspaltung $Z = a/2$. Die stärkere ist magnetisch ein Triplet $Z = \frac{3}{2}a$. Durch ihre senkrechten Zeemanschwingungen sind letztere zwei Linien getrennt. In beiden Fällen ist keine gegenseitige Störung der nahen Doppellinien im Magnetfelde bemerkbar. Eine geringe Verwandtschaft scheint zu Verschiebungen und Intensitäts-

1) H. Buisson u. Ch. Fabry, Journ. de Phys. Juin 1912. p. 18.

Annalen der Physik. IV. Folge. 40.

änderungen der Komponenten in schwächeren Magnetfeldern Veranlassung zu geben. Solche Fälle sind mehrfach beobachtet, z. B. bei der gelben Quecksilberlinie $2P - 3D$ 5790,87 und ihrem Begleiter $2P - 3d''$ 5789,88, oder bei den Doppellinien des Heliums. Die Verwandtschaft der zwei Quecksilberlinien ist nach den Seriengesetzen eine entferntere. Die zweiten Terme gehören verschiedenen Seriensystemen an. Am nächsten verwandt erscheinen nach den Seriengesetzen die Komponenten eines Doublets oder Triplets der drei Grundserien. Diese Gebilde scheinen die geringste Stabilität zu besitzen. Es wird eine wichtige Aufgabe sein, die Störungen bei verschiedenen Verwandtschaftsgraden zu studieren. Solche Studien hat der eine von uns an den Linien gemacht, welche ein Glied einer I. Tripletnebenserie bilden und einander oft bis zur Störung genähert sind.

Unser Elektromagnet besitzt vertikale Eisenschenkel von 25 cm Durchmesser. Darauf gelegt sind Eisenwürfel mit abgerundeten Ecken und Kanten. Die einander zugewandten Flächen dieser Würfel sind Kegelstumpfe und tragen Polspitzen von 10 cm Basisdurchmesser, welche dem Kegelstumpf aufgeschliffen und über ihn gestülpt sind. Wir haben diese Polspitzen dadurch verbessert, daß ihre Dicke schon am Rande vermehrt wurde, daß sie also möglichst viel weiches Eisen enthielten, und daß sie einen Kegelwinkel von etwa 60° erhielten. Dadurch erreichten wir bei runden Stirnflächen von 6 mm Durchmesser und 2 mm Abstand ein Feld von 42000 Gauss bei 22 Amp. (ca. 50000 Amperewindungen). Polspitzen von länglicher Stirnfläche, nämlich 8 mm lang und 4 mm breit, ergaben im Abstand von 2 mm mit 23 Amp. ein hinlänglich homogenes Feld von 40700 Gauss. Diese Felder ließen sich ca. zwei Stunden lang genügend konstant halten.

Unsere im früheren Aufsatze beschriebene Quarz-Geissler-röhre versahen wir mit einer kurzen (ca. 10 mm langen) Kapillaren von 2 bis 2,5 mm äußerer Dicke, so daß sie in das beschriebene längliche Feld paßte. Da sie aber mit dieser dünnen Kapillaren sehr zerbrechlich war, verbanden wir ihre beiden Elektrodenröhren außerdem durch eine angeschmolzene gebogene Quarzstange, welche die Röhre genügend verstiefe. Durch diese Quarzstange wurde auch das Anblasen der dünnen

Kapillaren erleichtert. Dies war wichtig, da die dünnen Kapillaren in hohem Felde gewöhnlich nur eine Lebensdauer von zwei Stunden hatten, und daher für jede Aufnahme eine frische Kapillare eingesetzt werden mußte. Der Gasdruck in der Röhre mußte im hohen Felde noch höher als früher gehalten werden. Blieb er unterhalb 10 mm Quecksilber, so leuchtet die Kapillare bläulich, wie bei der Flaschenfunkenentladung, und die Intensität unserer Linie 3947 sank beträchtlich. Mit etwa 10 mm Quecksilber erzielten wir soeben den Lichtfaden und genügende Intensität von 3947.

Als Feldnormalen dienten die Linien 4368,47 und 3973,41 des Sauerstoffs, die Siliciumlinien 2435,27, 2881,7, 3905,65 und die Liniengruppe der sechs Siliciumlinien 2506,92 bis 2528,65¹⁾, ferner die Kohlelinie 2478,58. Wir nahmen die in der früheren Arbeit gegen die Quecksilberlinien bestimmte und angegebene spezifische magnetische Aufspaltung $Z = \Delta\lambda/\lambda^2 H$ dieser Linien auch für die höheren Felder als richtig an. Da die so aus verschiedenen Linien ermittelten Feldwerte übereinstimmten, ist es wahrscheinlich, daß diese Linien ihre spezifische Aufspaltung bis 40700 exakt beibehalten. Nach den Messungen von Fr. A. Stettenheimer²⁾ ist die Konstanz der Größe Z für zwei Linien des Zn und Cd zwischen 10000 und 35000 Gauss und nach Gmelin³⁾ außerdem für einige Quecksilberlinien zwischen 3500 und 10000 Gauss exakt erfüllt.

Das Serientriplet 3947 des Sauerstoffs.

Der Fortschritt der Verwandlung zum normalen Triplet ist augenfällig, wenn man die Figur und die Reproduktionen

1) In unserer früheren Arbeit sind die Linien 2435,273, die Gruppe 2506,923 bis 2528,653, ferner 2681,357, 2881,67, 3905,647 für Sauerstofflinien gehalten, welche im Felde auftreten. Dies ist ein Irrtum. Es sind Siliciumlinien, von der Verdampfung des Quarzes herrührend. Außerdem traten schwach auf die Linien 3856, 4863, 4128 und 4181 des Siliciums. Die ultravioletten Linien gehören zu den rauen ultimis nach de Gramont, womit ihre Stärke verständlich wird. 2478,58 ist doch wohl die Kohlelinie. — Die Wellenlängenzahl 3973,734 einer Sauerstofflinie enthält einen Druckfehler. Es soll heißen: 3973,414 Å.-E.

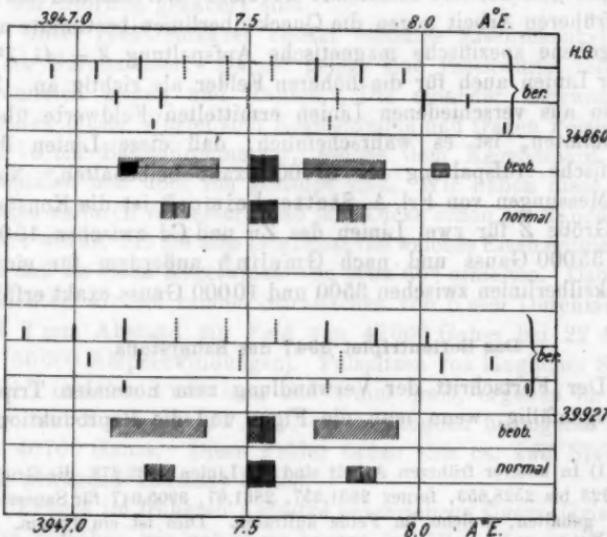
2) A. Stettenheimer, Ann. d. Phys. 24. p. 384. 1907.

3) P. Gmelin, Tübinger Dissertation 1909; Ann. d. Phys. 28. p. 1079. 1909.

(vgl. Taf. I) mit den entsprechenden Bildern bei niederen Feldern vergleicht. Da die seitlichen Komponenten jetzt deutlich von der Mittellinie getrennt sind, und da jede Seitenkomponente an ihren beiden Rändern scharf begrenzt ist und lediglich als eine verbreiterte Linie erscheint, haben wir jetzt quantitative Messungen anstellen können.

I. Breite und Aufspaltung der senkrecht schwingenden Seitenkomponenten.

Die Photographien der I. Gitterordnung, deren vorzügliche Definition aus den 11,28 fachen vergrößerten Reproduktionen vgl. Taf. I) hervorgeht, und welche eine völlig ausexponierte Schwärzung der Seitenkomponenten zeigen, wurden genau durchgemessen. Man stellte die Ränder jeder Seitenkomponente a und b bzw. c und d , sowie die Mitte der Mittelkomponente



ein und berechnete die Breite der Seitenkomponenten, sowie die Wellenlängendifferenz $\Delta\lambda$ ihrer Mitten. Diese ihre Aufspaltung in Wellenlängen verglich man mit der Wellenlängendifferenz „ $\Delta\lambda$ normal“ des normalen Triplets, berechnet für das gleiche Feld und die Wellenlänge 3947,5 Å.-E. Soweit die III. und IV. Gitterordnung genügend geschwärzte Seitenkom-

Tabelle I.

Breite und Abstand der Seitenkomponenten.

A. 35000 Gauss. Mittelkomponente 3947,544 Å.-E.

Aufn.	a	b	c	d	Breite		Δl	norm.	norm. beob.
					a-b	c-d			
XIII I. O.	7,895	7,658	7,407	7,127	0,287	0,280	0,509	0,512	+0,6 %
34925 G.	Mittel:	7,776		7,267					
XXI I. O.	7,893	7,665	7,415	7,123	0,228	0,293	0,510	0,510	0
34790 G.	Mittel:	7,779		7,269					
XXI III. O.	7,908	7,658	7,421	7,129	0,252	0,292	0,507	0,510	+0,6
34790 G.	Mittel:	7,782		7,275					
Mittel I. O.	7,894	7,662	7,411	7,125	0,233	0,287	0,510	0,511	+0,3 %
34860 G.	Mittel:	7,778		7,268					

B. 40000 Gauss. Mittelkomponente 3947,541 Å.-E.

XV I. O.	7,947	7,703	7,388	7,124	0,244	0,265	0,569	0,582	+2,2 %
39779 G.	Mittel:	7,825		7,256					
XV a I. O.	7,948	7,689	7,393	7,107	0,260	0,286	0,568	0,582	+2,8
39785 G.	Mittel:	7,818		7,250					
XVa IV. O.	7,947	7,679	7,406	7,088	0,268	0,323	0,568	0,582	+2,4
39785 G.	Mittel:	7,818		7,245					
XVI I. O.	7,938	7,699	7,368	7,123	0,239	0,244	0,578	0,582	+1,4
39747 G.	Mittel:	7,819		7,246					
XVI III. O.	7,936	7,690	7,392	7,123	0,246	0,269	0,555	0,582	+4,6
39747 G.	Mittel:	7,818		7,258					
XVI IV. O.	7,972	7,686	7,382	7,068	0,286	0,314	0,604	0,582	-3,8
39747 G.	Mittel:	7,829		7,225					
XVIII I. O.	7,936	7,698	7,374	7,087	0,288	0,287	0,587	0,596	+1,5
40120 G.	Mittel:	7,817		7,230					
XX I. O. ¹⁾	7,924	7,698	7,384	7,104	0,225	0,281	0,567	0,580	+2,2
39594 G.	Mittel:	7,811		7,244					
XVII I. O. ¹⁾	7,901	7,704	7,378	7,085	0,197	0,293	0,572	0,587	+2,5
40121 G.	Mittel:	7,803		7,231					
Mittel ²⁾ I. O.	7,939	7,697	7,382	7,109	0,241	0,273	0,578	0,584	+1,9 %
39927 G.	Mittel:	7,818		7,245					

1) Schwache Aufnahme senkrechter Schwingungen, alle übrigen beide Schwingungen, p. 966!

2) Mit Ausnahme der letzten XVII I. O.

ponenten zeigte, wurden auch diese Aufnahmen durchgemessen. Da aber die Stelle maximaler Schwärzung in beiden Seitenkomponenten etwas nach innen verschoben ist, erhielt man aus ungenügend exponierten Bildern einen bis zu 8 Proz. kleineren Wert von $\Delta\lambda$. Einige Messungen höherer Ordnung an guten Aufnahmen sind der vorstehenden Tab. I beigefügt.

Im Felde 35000 Gauss ist die schwache Komponente kleiner Wellenlänge (vgl. IV p. 967) in III. Ordnung die Begrenzung der breiten Komponente, in I. Ordnung liegt sie in der breiten Komponente. Die Aufnahmen bei 35000 Gauss waren stärker als die bei 40000 Gauss. Von letzteren waren XVI und XVIII am stärksten.

Nach Tab. I ist die Aufspaltung der Mitten der Seitenkomponenten in beiden Feldern innerhalb unserer Meßfehler die des normalen Triplets. Die Breite der zwei Seitenkomponenten ist eine verschiedene. Die Komponente größerer Wellenlänge ist schmäler. Die Verschiedenheit scheint bei 35000 Gauss größer zu sein als bei 40000 Gauss. Ihre mittlere Breite ist 0,26 Å.-E. Die Resultate sind genau im Bilde der Figur dargestellt.

II. Die Breite der Mittelkomponente wurde in der II., III., IV. Gitterordnung gemessen. Die Aufnahme XXI 34790 Gauss, welche die kräftigste war, ergab z. B.

Gitterordn.:	II.	III.	IV.	Mittel	$\Delta\nu$
Breite	0,084	0,095	0,078	0,086 Å.-E.	0,55 cm ⁻¹

$\Delta\nu$ bedeutet die entsprechende Differenz der Wellenzahlen ($\Delta\lambda/\lambda^2$). Solche Messungen an verschiedenen Aufnahmen ergeben:

H	8947,5 Mitte		4368 Mitte	
	$\Delta\lambda$ Å.-E.	$\Delta\nu$ cm ⁻¹	$\Delta\lambda$	$\Delta\nu$
34925	0,086	0,55		
34790	0,086	0,55	0,110	0,58
39779	0,078	0,50		
39785 ¹⁾	0,071	0,46	0,095	0,50
39747	0,088	0,56	0,126	0,66
40730	0,088	0,56	0,118	0,62

1) In dieser Aufnahme hatte die Mittelkomponente der ebenso starken Siliciumlinie 3908 die Breite $\Delta\lambda = 0,050$ Å.-E., $\Delta\nu = 0,33$ cm⁻¹.

Diese Resultate zeigen, daß die Mittelkomponente in Schwingungszahlen dieselbe Breite besitzt, wie die der einfachen scharfen Sauerstofflinie 4368 unter denselben Bedingungen. Diese Breite ist für 3947 etwa 0,08 Å.-E., also ca. dreimal geringer als die Breite der Seitenkomponenten. Auch dies ist im Bilde der Figur getreu wiedergegeben. Die Komponenten des berechneten normalen Triplets sind 0,08 Å.-E. breit gezeichnet.

III. Die Lage der Mittelkomponente ließ sich gegen die Mittelkomponente des normalen Zeemantrplets der Siliciumlinie 2681 III. O. exakt messen, welche unmittelbar neben der II. Ordnung von 3947 liegt.¹⁾ Dabei zeigte sich eine deutliche Verschiebung der Mittelkomponente von 3947 mit wachsendem Felde nach kleinen Wellenlängen:

$$H = 12774 \quad 21829 \quad 31899 \quad 34900 \quad 39980$$

$$\lambda = 3947.610 \quad 47.572 \quad 47.554 \quad 47.544 \quad 47.541$$

Hierbei ist die Wellenlänge der Siliciumlinie zu 2631,357 angenommen: in Übereinstimmung mit den Wellenlängen 3947,438, 47.626, 47.781 des unmagnetischen Sauerstofftriplets.

IV. Die schwachen äußersten Komponenten, welche in der früheren Arbeit (p. 913) verfolgt sind, sind bei 35 000 Gauss noch sichtbar und ergeben hier:

Komponente kleiner Wellenlänge $Z = 7,17 \times 10^{-5}$
 " " großer " " $Z = 9,39$ "

Die Aufspaltung der Komponente kürzerer Wellenlänge ist also gegen 32000 Gauss ($Z = 7,4$) noch kleiner geworden. Diese Komponente ist jetzt bereits in die breite Hauptkomponente hineingerückt. Die Aufspaltung der anderen Komponente ist, wie früher, zweifach normal geblieben ($2a = 9,39 \times 10^{-5}$).

Bei 40000 Gauss ist die Komponente kleiner Wellenlänge ganz verschwunden und die andere jedenfalls erheblich lichtschwächer geworden. Denn nur auf einer Aufnahme (XVI) ist eine kaum sichtbare Spur der letzteren angedeutet, während sie auf einer kaum stärkeren Aufnahme bei 35000 Gauss sogar noch meßbar ist.

1) Daher konnte die II. Ordnung für Betrachtung I nicht verwertet werden. Dagegen war die VI. Ordnung von 2681 zu schwach, um die IV. Ordnung von 3947 zu stören.

Als Resultat der Untersuchung steht folgendes fest: Die bemerkenswerte Definition der parallel schwingenden Mittelkomponente, die exakt normale Aufspaltung der Mitten der senkrecht schwingenden Seitenkomponenten beweisen eine so augenfällige Annäherung an das normale Zeemantriplet, daß man wohl ein Recht hat, allein auf Grund der beobachteten Tatsachen das exakt normale Triplet als Endstadium dieser magnetischen Verwandlung anzunehmen. Damit würde unsere durch den Zusammenhang der Spektralgesetze mit der magnetischen Aufspaltung begründete Erwartung bestätigt sein.

Die Wasserstofflinien H_α und H_β .

Wegen der größeren Aufspaltung wurden die Messungen in den höheren Feldern genauer als früher. H_α war in I. und bisweilen auch in II. Ordnung stark genug. Die Lichtstärke von H_β genügte dagegen oft nicht zur Messung. Das Aussehen der Zeemantriplets dieser Linien war noch ungefähr dasselbe wie in schwächeren Feldern. Das senkrecht schwingende Licht der Mittelkomponente von H_α schien etwas mehr abgeschwächt, wenn die Seitenkomponenten ebenso stark oder stärker als früher waren. Die Messung der Aufspaltung der Seitenkomponenten ergab folgendes.

Tabelle II.
Aufspaltung $Z \times 10^5$ der Wasserstofflinien.

Aufnahme	H. G.	H_α		H_β	
		I. O.	II. O.	I. O.	II. O.
XIII	34925	5,175		5,22?	
XIV	34946	5,158	5,118	4,93	5,179
XXI	34790	5,164	5,136	5,189	5,148
Mittel:	34890		5,150		5,134
Aufnahme	H. G.	H_α	I. O.	H_β	I. O.
XVIII	40780	5,102		5,077	
XV a	39785	4,952?			
XVI	39747	5,005			
XV	39779	5,032			
XVII	40121	5,048		5,053	
XIX	40312	4,97?			
XX	39594	5,029			
Mittel:	alle	5,020		5,065	
	ohne fragliche	5,052			

Zwischen 14000 und 32000 Gauss fanden wir früher im Mittel $Z = 5,20 \times 10^{-6}$. Eine Abnahme der Aufspaltung Z mit steigendem Felde war angedeutet, konnte aber nicht bewiesen werden. Die jetzigen Messungen sind genau genug, um die Abnahme von Z mit steigendem Felde wahrscheinlich zu machen. Damit tritt zu den früheren Gründen ein weiterer für eine magnetische Verwandlung dieser Linien. Der Sinn der Veränderung der Größe Z ist im Einklang mit der Erwartung, daß das Endziel auch dieser Verwandlung das normale Triplet ($Z = 4,698 \times 10^{-6}$) ist. Ob die Langsamkeit dieser Verwandlung in entfernterer Verwandtschaft der zwei Komponenten dieser Doppellinien begründet ist, muß weitere Forschung lehren (vgl. p. 961).

Über die Breite der drei Zeemankomponenten haben wir noch einige Messungen in I. und soweit möglich auch in II. Ordnung angestellt und finden übereinstimmend in den beiden Feldern:

	H_α		H_β	
	$\Delta\lambda \text{ Å.-E.}$	$\Delta\nu \text{ cm}^{-1}$	$\Delta\lambda \text{ Å.-E.}$	$\Delta\nu \text{ cm}^{-1}$
Seitenkomponente	0,29	0,67	0,25	1,06
Mittelkomponente beide Schwingungen	0,31	0,72	0,26	1,10
Mittelkomponente senkr. Schwingungen	0,29	0,67	0,24	1,02

Die Mittelkomponente der unpolarisierten Aufnahme (beide Schwingungen) von H_α I. Ordnung ist in den meisten Aufnahmen überexponiert und dann breiter. Obige Angabe entstammt Messungen an der II. Ordnung. Dieselbe Komponente von H_α senkrechte Schwingungen, d. h. soweit sie senkrecht schwingendes Licht enthält, ist meist sehr schwach und erscheint dann schmäler. Obige Angabe entstammt zwei Aufnahmen, welche sie in I. Ordnung genügend deutlich enthielten. Auch die Mittelkomponente von H_β (beide Schwingungen) ist infolge ihrer größeren Intensität breiter gemessen als die Seitenkomponenten. Im übrigen sind die angegebenen Werte Mittelwerte mehrerer Aufnahmen, deren Einzelwerte bis auf 0,05 Å.-E. übereinstimmten. Der Gasdruck (des Sauerstoffs) war hierbei in der Röhre etwa 10 mm Quecksilber (früher ca. 5 mm), vgl. p. 963.

Es folgt, daß bei beiden Linien die Breite der Seitenkomponenten dieselbe ist wie die der polarisierten oder unpolarisierten Mittelkomponente. In der Skale der Wellenzahlen sind die Komponenten von H_s breiter als die von H_a .

Die Abnahme der spezifischen Aufspaltung Z mit steigendem Felde würde mit den neuen Erörterungen¹⁾ des Hrn. W. Voigt über diesen Fall, soweit wir sehen, nicht in Einklang stehen. Die gleiche Breite der Seitenkomponenten und der Mittelkomponente des Triplets dürften mit dem ersten Teile der Voigtschen Erörterung nicht vereinbar sein. Dagegen ist bemerkenswert, daß die unvollständige Polarisation der Mittelkomponente aus der Theorie abgeleitet werden kann. Auch die voneinander unabhängige Entwicklung der parallel und senkrecht schwingenden Komponenten, welche beim Sauerstoff-triplet zu bestehen scheint, und für welche es weitere Beispiele gibt, würde einer Grundannahme Voigts entsprechen.

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. 40. p. 368. 1913.

(Eingegangen 4. März 1913.)

7. Über die innere Reibung verdünnter Gase
und über den Zusammenhang
der Gleitung und des Temperatursprunges an
der Grenze zwischen Metall und Gas¹⁾;
von A. Timiriazeff.

§ 1. Einleitung.

Die von Kundt und Warburg²⁾ entdeckte Abnahme des Wärmetransports bei kleinen Drücken kann, wie die Untersuchungen von Smoluchowski³⁾ gezeigt haben, durch die Annahme erklärt werden, daß an der Grenze zwischen der Gefäßwand und Gas eine Temperaturdifferenz sich bildet. Die experimentell bestimmte Größe des „Temperatursprunges“ ist im Einklang mit der Theorie von Smoluchowski⁴⁾ umgekehrt proportional dem Gasdrucke, wie es aus den Messungen von Smoluchowski⁵⁾, Gehrcke⁶⁾ und Lasareff⁷⁾ hervorgeht.

Andererseits haben die Untersuchungen von Kundt und Warburg⁸⁾ über die innere Reibung der Gase gezeigt, daß die bei kleinen Gasdrucken auftretende Abnahme des Bewegungsgrößentransports durch die Annahme einer Gleitung längs der Oberfläche fester Körper erklärt werden kann. Die Größe der Gleitung ist auch dem Drucke umgekehrt proportional.

1) Ein kurzer Bericht über diese Untersuchung wurde auf dem II. Mendelejeffschen Kongreß in St. Petersburg am 25. Dezember 1911 vorgetragen [vgl. Tageblatt des Kongresses Nr. 8. p. 68 (russisch)].

2) A. Kundt u. E. Warburg, Pogg. Ann. 156. p. 177. 1875.

3) M. v. Smoluchowski, Wied. Ann. 64. p. 101. 1898.

4) M. v. Smoluchowski, Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. zu Wien 107. Abt. IIa. p. 304. 1898; 108. Abt. IIa. p. 5. 1899.

5) M. v. Smoluchowski, l. c.

6) E. Gehrcke, Ann. d. Phys. 2. p. 102. 1900.

7) P. Lasareff, Ann. d. Phys. 37. p. 233. 1912.

8) A. Kundt u. E. Warburg, Pogg. Ann. 156. p. 337, 525. 1875.

Die Aufgabe der vorliegenden Untersuchung war, die Reibungerscheinungen bis zu großen Verdünnungen (0,001 mm) zu verfolgen und den Zusammenhang der Wärmeleitungs- und Reibungsphänomene in verdünntem Gase zu ermitteln — einen Zusammenhang, der eine Ergänzung der wohlbekannten Beziehung zwischen der inneren Reibung und Wärmeleitung bei mittleren Druckverhältnissen bildet.

§ 2. Methode.

Es war die Methode der stationären Ablenkung gewählt; konzentrisch und im Innern eines rotierenden Zylinders *A* (Fig. 1) war ein Zylinderkörper *B* mittels eines dünnen Metalldrahtes (Phosphorbronze 0,1 mm) aufgehängt. Die Ablenkung wurde durch Spiegelablesung nach der üblichen Art beobachtet. Zwei Schutzzringe *C* ermöglichen, von der Randkorrektion abzusehen. Die passend gewählte elektromagnetische Dämpfung gestattete eine rasche Einstellung der stationären Ablenkung. Die Umdrehungsgeschwindigkeit wurde mittels Tourenzähler und Stoppuhr bestimmt.

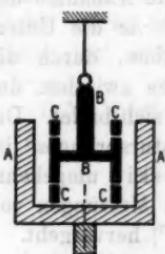


Fig. 1.

Ähnliche Methoden sind vielfach bei den Reibungsuntersuchungen angewandt worden (vgl. z. B. La Couette¹), Gyözö Zemplén², Drew³ und Gilchrist⁴) und haben den Vorzug vor den von Kundt und Warburg⁵, Crookes⁶ und Hogg⁷ angewandten Methode der Dämpfungsdecrementbestimmung, daß man keiner Randkorrektion und keiner Korrektion wegen der Dämpfung des Aufhängedrahtes bedarf, und daß die Beobachtungen viel weniger Zeit beanspruchen.

1) La Couette, *Journ. de Phys.* 9. 2. Ser. p. 414. 1890.

2) Gyözö Zemplén, *Ann. d. Phys.* 38. p. 71. 1912.

3) E. R. Drew, *Phys. Rev.* 12. p. 114. 1901.

4) L. Gilchrist, *Physik. Zeitschr.* 14. p. 160. 1913.

5) A. Kundt u. E. Warburg, *l. c.*

6) Sir William Crookes, *Phil. Trans. of the Roy. Soc. London* 172. p. 387. 1882.

7) J. L. Hogg, *Contributions from the Jefferson Physical Laboratory* 7. 1909.

Der ganze Apparat war unter eine Glasglocke gestellt und der Transport der Bewegungsgröße durch die Gasschicht zwischen den Zylindern *A* und *B* (Fig. 1) von Atmosphärendruck bis zu 0,001 mm untersucht.

Um den Einfluß der Gasschichtdicke zu ermitteln, war eine Reihe von Zylindern *A* von verschiedenem inneren Durchmesser hergestellt; diese Zylinder konnte man leicht auswechseln.

§ 3. Beschreibung der Apparate.

Der Reibungsapparat war auf einer Stahlscheibe *AA* (Fig. 2) (von 200 mm Durchmesser) montiert. In der Scheibe war eine ringförmige Rinne ausgedreht, an welche die Glasglocke *BB* angeschliffen war (der Schliff war mit Ramsayfett gedichtet und von außen durch Quecksilber verschlossen). Die 920 mm lange Stahlachse *aa* geht im Innern eines in der Mitte der Grundscheibe eingeschraubten Stahlrohres *C* durch und trägt ein mit Quecksilber gefülltes Gefäß *G*. Die ganze Vorrichtung bildet einen Barometerverschluß und erlaubt zugleich, die Achse von außen zu drehen. Am unteren Ende ruht die Achse auf einer Stahlkugel in der aus der Fig. 2 ersichtlichen Weise.

Am oberen Ende der Achse ist eine Scheibe *M* angebracht, welche die auswechselbaren Zylinder *PP* trägt. Das obere Lager der Achse (Kugellager), das zugleich den unteren Schutzring bildet, ist durch vier Schrauben an die vier durch die Öffnungen in *R* hervorragenden Teile des oberen Gestelles des Apparates *Q* befestigt.

Der aufgehängte Zylinderkörper *R* hat, außer den genannten vier Öffnungen, durch welche die vier hervorragenden Teile *Q* frei durchgehen und die den für die Ablenkungen nötigen Spielraum zulassen, noch vier kleine Öffnungen *b*, welche mit entsprechenden Löchern, die in das Gestell *Q* gebohrt sind (in der Fig. 2 nicht gezeigt), direktes Beschauen der Teile *R* und *a* des aufgehängten Körpers bzw. der rotierenden Achse zulassen und eine genaue Justierung des Apparates ermöglichen; diese Justierung kann ausgeführt werden mittels dreier Stellschrauben, die an dem den Torsionskopf tragenden Teil *E* angebracht sind.

Das den Torsionskopf tragende Messingrohr K hat am unteren Ende vier Ausschnitte, die das Anbringen einer silbernen Scheibe s am oberen Teile des aufgehängten Körpers R ermöglichen.

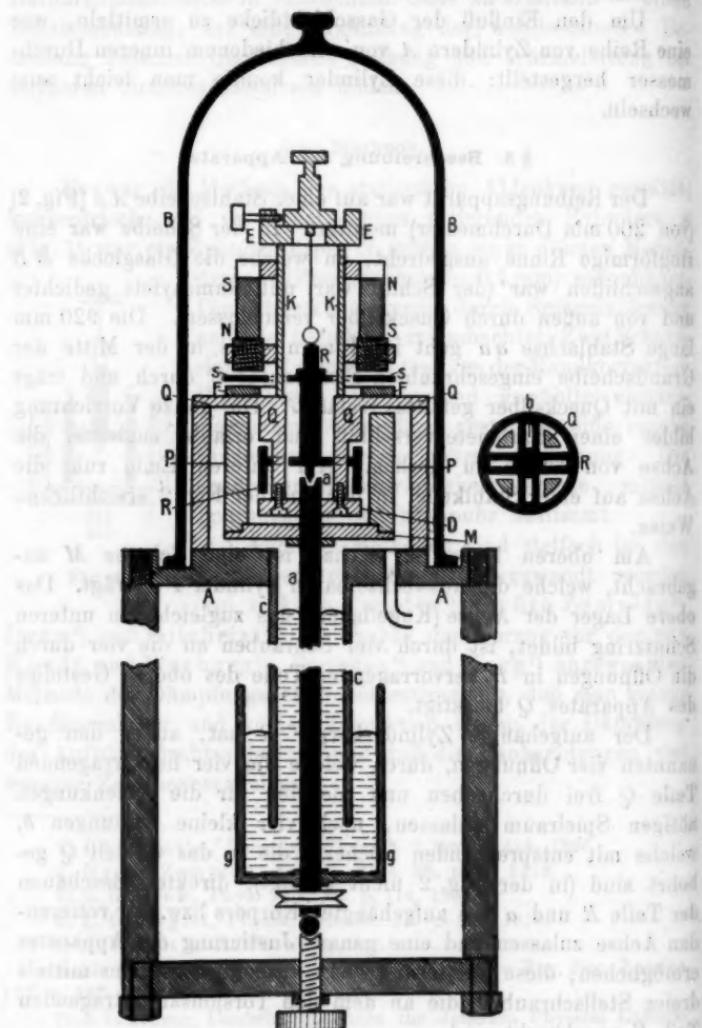


Fig. 2.

ermöglichen. Die Scheibe ss hat vier Ausschnitte, die einen für die Ablenkung nötigen Spielraum zulassen. Diese Scheibe dient als Dämpfungsvorrichtung; vier Stahlmagnete NS mit verstellbaren Polen sind am Messingrohr K befestigt; der magnetische Kraftfluß wird durch einen an Q liegenden sternförmigen Eisenkörper F ergänzt. Die silberne Scheibe war aus reinem Silber hergestellt und nachher nach Kohlrausch¹⁾ mit verdünnter kochender Schwefelsäure gewaschen und dann sorgfältig mit kochendem Wasser gespült, um vom „magnetischen Staub“ frei zu werden. Die so verfertigte Dämpfungscheibe war folgendermaßen auf magnetische Eigenschaften geprüft: es war eine Beobachtungsreihe mit *Dämpfung* ausgeführt und mit einer entsprechenden Reihe verglichen, die *ohne Dämpfung* ausgeführt war. Es stellte sich heraus, daß die Dämpfung keinen merklichen Einfluß auf die Ausschläge hat. Wäscht man nicht mit Schwefelsäure, so bekommt man eine erhebliche Unsymmetrie der Ablenkung und die Ausschläge sind von 4 bis 2 Proz. kleiner, was einer Magnetisierung der oberflächlichen Verunreinigungen zugeschrieben werden muß.

Der ganze Apparat war, außer den genannten eisernen und stählernen Teilen, aus Messing hergestellt und vernickelt. Der Druck wurde mittels Mc Leodschen Manometers gemessen. Trockene Gase, Luft, Kohlensäure und Wasserstoff (die beiden letzten aus käuflichen Stahlzylindern entnommen) wurden in den Apparat eingelassen und die Versuche bis 10 mm ausgeführt; nachdem wurden die beiden Quecksilberverschlüsse V_1 und V_3 (Fig. 3) geschlossen. Die im Gefäße R enthaltene Gasmenge dient für weitere Versuche bei größeren Verdünnungen; der Apparat wurde mit einer Gaedepumpe evakuiert und dann mittels zweier Verschlüsse V_1 und V_3 kleine Gasportionen eingeführt. Diese Vorrichtung²⁾ ermöglicht eine rasche Einstellung beliebiger Drucke.

Die Achse war durch einen Drehstrommotor (1400 Touren $\frac{1}{4}$ P.S.) über ein Zahnradvorgelege (1 : 25) angetrieben. An der Achse des Apparates war mittels Zahnrädern ein Touren-

1) F. Kohlrausch, Lehrbuch der praktischen Physik, 9. Aufl. 1901. p. 319.

2) Vgl. P. Lasareff, l. c. p. 238.

zähler angebracht, der nach einer bestimmten Tourenzahl ein Läutwerk in Gang setzte, was eine bequeme Geschwindigkeitsmessung mit Hilfe einer Stoppuhr gestattet.

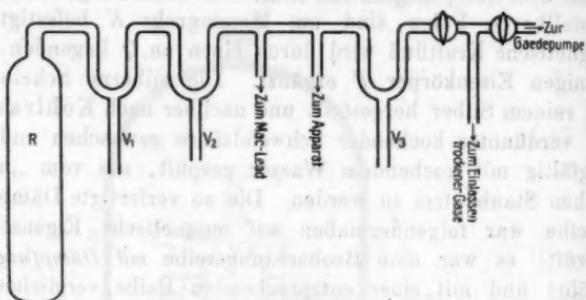


Fig. 3.

§ 4. Zur Theorie.

Die Theorie der Reibungserscheinung in stark verdünnten Gasen war für den Fall, daß die mittlere freie Weglänge nicht mehr verschwindend klein im Vergleich zum Abstand der festen Körper ist, die durch eine Gasschicht die Bewegungsgröße übertragen, zuerst von Kundt und Warburg¹⁾ entwickelt. Die genannten Forscher haben gezeigt, daß an der Oberfläche der festen Körper eine Gleitung stattfindet, und daß diese Gleitung umgekehrt proportional der Gasdichte ist, deswegen ist die Gleitung nur bei großen Verdünnungen zu beobachten. Bei dieser gas theoretischen Untersuchung waren die genannten Forscher von den üblichen Vorstellungen der elastischen Kugeln ausgegangen und haben die Theorie der Erscheinung an der Grenze zwischen Gas und festem Körper nach einem sinnreichen Näherungsverfahren entwickelt.

M. v. Smoluchowski hat in seiner ersten²⁾ theoretischen Abhandlung über den Temperatursprung denselben Weg eingeschlagen, später³⁾ aber hat er gezeigt, daß man zum gleichen

1) A. Kundt u. E. Warburg, Pogg. Ann. 155. p. 340. 1875.

2) M. v. Smoluchowski, Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. zu Wien 107. Abt. IIa. p. 304. 1898.

3) M. v. Smoluchowski, l. c. 108. Abt. IIa. p. 5. 1899.

Resultat gelangen kann, wenn man von der strengeren Maxwellischen Auffassung der Gastheorie ausgeht, wobei das mühsame Näherungsverfahren wegfällt.

Wir können ohne weiteres diese strengere Maxwellische Theorie auch auf Reibungsvorgänge anwenden. Boltzmann¹⁾ hat gezeigt, daß in der Gaschicht zwischen zwei parallelen Ebenen, von denen die eine A (Fig. 4) ruht und die andere in ihrer Ebene sich geradlinig und gleichförmig bewegt, die Geschwindigkeitsverteilung durch die folgende Funktion ausgedrückt werden kann

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(\xi, \eta, \zeta, x) \\ = A \left\{ 1 + 2 h m \frac{\partial v}{\partial x} x \eta - 2 h m \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\mu}{p} \eta \xi \right\} e^{-h m (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}, \end{array} \right.$$

wo

ξ, η, ζ die Geschwindigkeitskomponenten der Moleküle sind,
 v die Geschwindigkeit der Gasmasse parallel zur y -Achse,
 x die x -Koordinate der Gaschicht, von der ruhenden Platte A aus gerechnet,
 p der Gasdruck,
 μ die Reibungskonstante,
 m die Masse des Moleküls,

A und h Konstanten, wobei h durch die wohlbekannte Relation $\bar{c}^2 = \frac{s}{2 h m}$ mit dem mittleren Quadrat der Molekulargeschwindigkeit \bar{c}^2 verknüpft ist.

Diese Formel gilt nur im Falle, daß man die höheren Potenzen der Größen

$$2 h m \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{und} \quad 2 h m \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\mu}{p}$$

vernachlässigen kann. Eine Bedingung, die in unseren Versuchen mit Geschwindigkeiten, die klein sind im Vergleich zum mittleren Quadrat der Molekulargeschwindigkeit, erfüllt ist (maximale Umfangsgeschwindigkeit 16 cm/sec, Maximalwert der Größe $\partial v / \partial x = 270 \text{ sec}^{-1}$). Wenn wir weiter annehmen,

1) L. Boltzmann, Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen. Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. zu Wien 68, p. 275 bis 370. 1872; Wissensch. Abhandl. I B. p. 362. Leipzig 1909.

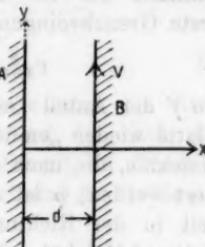


Fig. 4.

daß an den Ebenen *A* und *B* die von Smoluchowski benutzten Maxwellschen Grenzbedingungen statthaben, so bekommen wir die Grundgleichungen unseres Problems. Die erste Grenzbedingung¹⁾:

$$(2) \quad \varrho_2 \xi_2 = -(1-f) \varrho_1 \xi_1 + f \varrho_2' \xi_2',$$

wo f der Anteil „absorbiert“ Moleküle, die später von der Platte wieder „emittiert“ werden, ist; $(1-f)$ bezieht sich auf Moleküle, die nach den Gesetzen des elastischen Stoßes reflektiert werden; ϱ ist die Dichte und ξ die mittlere Geschwindigkeit in der Richtung der x -Achse. Die Indizes 2 beziehen sich auf Moleküle, die von der Wand *A* in positiver x -Richtung fliegen, ebenso wie die Indizes 1 auf Moleküle, die im entgegengesetzten Sinne sich bewegen.

Die Gleichung sagt aus, daß die von der Wand fliegenden Moleküle aus „reflektierten“ und „emittierten“ Molekülen bestehen; für die „emittierten“ nehmen wir an, daß sie die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung besitzen.

Ganz analog kann man die zweite Grenzbedingung für die Bewegungsgröße schreiben²⁾:

$$(3) \quad \varrho_2 \xi_2 \eta_2 = -(1-f) \varrho_1 \xi_1 \eta_1 + f \varrho_2' \xi_2' u,$$

wobei u die relative Geschwindigkeit der Platte und der angrenzenden Gasschicht ist.

Führen wir die in (2) und (3) angedeuteten Rechnungen mit Hilfe von (1) aus und bemerken dabei, daß die Integration nach ξ für die Größen mit Index 2 von 0 bis ∞ und für Größen mit (1) von $-\infty$ bis 0 ausgeführt werden soll, so bekommen wir, nach Division der Gleichung (3) durch (2), die Gleichung:

$$(4) \quad u = - \frac{2-f}{f} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{h m}} \frac{\mu}{p} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Oder durch Ersatz von $h m$ durch die absolute Temperatur T , das Molekulargewicht M und die Gaskonstante R_0 :

$$(4') \quad u = - \frac{2-f}{f} \frac{\mu}{p} \sqrt{\frac{\pi R_0 T}{2 M}} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

1) J. C. Maxwell, Scientific Papers 2. p. 707, Gleichung (61).

2) J. C. Maxwell, l. c. p. 707, Gleichung (62).

Wie man sieht, ist (4') ganz analog der Grenzbedingung einer Flüssigkeit mit Reibung unter Berücksichtigung einer endlichen Gleitung:

$$(5) \quad k u' = \mu \frac{\partial v}{\partial x},$$

wo $u' = -u$ ist.

Nur sagt die hydrodynamische Theorie über die Konstanten k und μ nichts weiter aus; während die nach der Maxwell'schen Theorie berechnete Beziehung¹⁾, in Übereinstimmung mit Kundt und Warburg²⁾, zeigt, daß die Größe μ/k umgekehrt proportional dem Drucke p ist.

Nach der hydrodynamischen Theorie ist die pro Quadratzentimeter in der Zeiteinheit übertragene Bewegungsgröße gleich³⁾:

$$(6) \quad G = \frac{\mu V}{d + 2 \frac{\mu}{k}},$$

wo V die Geschwindigkeit der Platte B (Fig. 4) (die Geschwindigkeit der Platte A ist gleich Null angenommen) und d der Plattenabstand ist. Führen wir statt μ/k den Ausdruck

$$\frac{\mu}{k} = \frac{2-f}{f} \frac{\mu}{p} \sqrt{\frac{\pi R_0 T}{2 M}}$$

aus (4') in (6) ein und setzen zur Abkürzung

$$(7) \quad \frac{2-f}{f} \mu \sqrt{\frac{\pi R_0 T}{2 M}} = a_0,$$

so bekommen wir

$$(6') \quad G = \frac{\mu V}{d + 2 \frac{a_0}{p}}.$$

Wegen der Kleinheit der Größe a_0 bei großen Werten von p ist das Glied $2a_0/p$ im Vergleich zu d verschwindend klein. Die Größe G ist in diesem Stadium unabhängig vom Drucke p , in Übereinstimmung mit dem Maxwell'schen Gesetze.

1) J. C. Maxwell, l. c. p. 708, Gleichung (69).

2) A. Kundt u. E. Warburg, l. c.

3) M. Brillouin, *Leçons sur la Viscosité* p. 50. Paris, Gauthier-Villars 1907.

Bei kleinen Werten von p überwiegt das zweite Glied im Nenner (6') und wir bekommen

$$(6'') \quad G = \frac{\mu V}{2 a_0} p.$$

Die Größe G ist dem Drucke proportional.

Wegen der Größe des Druckintervales (760 mm – 0,001 mm) ist es zweckmäßiger, den Logarithmus des Druckes x ($p = e^x$) in die Formel einzuführen

$$(6'') \quad G = \frac{\mu V e^x}{d \cdot e^x + 2 a_0}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß die Kurve $G = f(x)$ einen Inflextionspunkt für

$$e^x = \frac{2 a_0}{d}$$

hat, was für G den Wert

$$G = \frac{\mu V}{2 d}$$

gibt, i. e. gleich der Hälfte der Größe G für Normaldruck.

Führen wir in die Gleichung (7) den der mittleren Weglänge in der Maxwell'schen Theorie entsprechenden Wert¹ $\lambda = \text{Relaxationszeit} \times \text{mittlere Geschwindigkeit}$ ein, so erhalten wir

$$(8) \quad \frac{a_0}{p} = \frac{2-f}{f} \frac{2}{\pi} \lambda.$$

Die Konstante a_0 ist also mit der Temperatursprungkonstante von Smoluchowski²:

$$(9) \quad \gamma = \frac{15}{4\pi} \frac{2+f}{f} \lambda$$

durch folgende Bedingung verknüpft:

$$(10) \quad a_0 = \frac{8}{15} \gamma p.$$

Wir können somit die Konstante a_0 aus den Messungen des Temperatursprunges berechnen und die so berechnete Kurve $G = f(p)$ mit dem Experiment direkt vergleichen.

Es muß noch hervorgehoben werden, daß Formel (6'') für Weglängen, die groß im Vergleich mit dem Plattenabstand

1) J. C. Maxwell, l. c. p. 681.

2) M. v. Smoluchowski, Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. zu Wien 108. Abt. IIa. 1909. Gleichung (11).

sind, auf direkte Weise abgeleitet werden kann unter Vernachlässigung der gegenseitigen molekularen Zusammenstöße in der Gasschicht. Die Rechnung, die vollkommen analog ist mit der von Smoluchowski für die Wärmeleitung durchgeführten¹⁾, ergibt:

$$(11) \quad G = \frac{f}{2-f} v \sqrt{\frac{M}{2\pi R_e T}} \cdot p,$$

was mit dem Ausdruck (6") unter Berücksichtigung von (7) übereinstimmt.

Wir müssen noch die Korrektion berücksichtigen, welche von der endlichen Krümmung der von uns angewandten Zylinderkörper herrührt; diese Korrektion fällt im größten Teile klein aus wegen der Kleinheit von $R_2 - R_1$ im Vergleich zu R_1 und R_2 .

Die hydrodynamische Theorie führt, wenn man die innere Reibung der Flüssigkeiten berücksichtigt, zu folgenden Resultaten, die für den Fall konzentrischer Zylinder gelten (diese Resultate gelten auch für Gase); die Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Flüssigkeit ω ist durch den Ausdruck:

$$(12)^2) \quad \omega = \frac{A}{r^2} + B$$

gegeben, wo A und B Konstanten sind. Nimmt man die Winkelgeschwindigkeit der Gasschicht an der Grenze des inneren bzw. äußeren Zylinders mit den Radien R_1 , R_2 gleich ω_1 bzw. ω_2 an, so bekommen wir:

$$(13) \quad A = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} (\omega_2 - \omega_1).$$

Die Geschwindigkeit der Scherung ist gleich $r(d\omega)/dr$; deshalb ist das gesuchte Moment der tangentialen Kräfte, die auf die innere zylindrische Oberfläche vom Radius R_1 wirken, pro Längeneinheit gleich

$$(14) \quad G = 4\pi\mu \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} (\omega_2 - \omega_1).^3)$$

1) M. v. Smoluchowski, Phil. Mag. 21. p. 11. 1911.

2) H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik p. 676, Gleichung (2).

3) H. Lamb, l. c. p. 676, Gleichung (6).

Findet an der Oberfläche eine Gleitung statt, und nehmen wir an, daß die „äußere“ Reibung der relativen Geschwindigkeit u' proportional ist, so finden wir:

$$(15) \quad T = k u',^1)$$

wo T die Tangentialkraft (in unserem Falle $T = \mu r (d\omega)/dr$), k die „Konstante“ der äußeren Reibung und u' die relative Geschwindigkeit der Flüssigkeit und der festen Wand ist.

Nennen wir die Winkelgeschwindigkeiten der *festen Zylinder* ω_1' bzw. ω_2' , so bekommen wir als Grenzbedingungen

$$(16) \quad \mu \left(\frac{d\omega}{dr} \right)_{R_1} = k(\omega_1 - \omega_1') \quad \text{und} \quad \mu \left(\frac{d\omega}{dr} \right)_{R_2} = k(\omega_2' - \omega_2).$$

Führen wir in (16) die aus (12) und (13) folgenden Werte von $d\omega/dr$ ein und addieren die beiden Gleichungen (16), so erhalten wir:

$$(17) \quad \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_2' - \omega_1'}{1 + 2 \frac{\mu}{k} \frac{1}{R_1 R_2} \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}}.$$

Führen wir weiter diese Größe in (14) ein und bemerken, daß $\omega_1' = 0$ ist, so finden wir die folgende Lösung unseres Problems:

$$(18) \quad G = 2\pi R_1^2 R_2 \omega_2' \mu \frac{2R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{(R_2 - R_1) + 2 \frac{\mu}{k} \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1 R_2 (R_1 + R_2)}}.$$

Vergleicht man dieses Resultat mit der Gleichung (8), die für eine unendliche Ebene abgeleitet war, so sieht man unmittelbar, daß hier zwei Faktoren:

$$\frac{2R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{und} \quad \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1 R_2 (R_1 + R_2)} \quad \left(\text{als Faktor bei } 2 \frac{\mu}{k} = 2 \frac{a_0}{p} \right)$$

auf treten.

Es muß besonders betont werden, daß außer den in der hydrodynamischen Theorie gemachten Annahmen die Formel (18) auf der Annahme beruht, daß $\mu/k = a_0/p$ auch hier gilt, d. h. daß die äußere Reibung unabhängig von der Krümmung der Flächen ist.

1) M. Brillouin, l. c. p. 44.

2) (18) ist auf die Längeneinheit bezogen; die Höhe des Zylinders war 1,995 cm.

Daß (18) nicht die strenge Lösung darstellt, sieht man schon daraus, daß für große Verdünnungen, wenn man $R_2 - R_1$ vernachlässigen kann, die Größe G einen Faktor

$$\frac{2 R_1 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2}$$

hat; wenn man aber für den Fall rotierender Zylinder einen der Formel (11) entsprechenden Ausdruck für große mittlere Weglängen ableitet, so findet man den oben genannten Faktor = 1.

Diese Abweichung kann man wegen ihrer Kleinheit aus unseren Versuchen nicht finden, weshalb hier auch die entsprechenden Rechnungen nicht ausgeführt worden sind.

§ 5. Die Beobachtungen.

Die erste Messungsreihe war mit Luft ausgeführt, und zwar mit vier verschiedenen äußeren Zylindern, deren Durchmesser so gewählt waren, daß die Größen $R_2 - R_1$ ungefähr eine geometrische Reihe bildeten:

Zylinder Nr. 1	$R_2 - R_1 = 0,406$ cm	
" " 2	" = 0,209 "	$R_1 = 2,4925$ cm
" " 3	" = 0,100 "	
" " 4	" = 0,053 "	

Es stellte sich heraus, daß bei kleinen Umdrehungsgeschwindigkeiten, die benutzt wurden (0,3 bis 0,86 Umdrehungen pro sec), die Ablenkungen innerhalb der Beobachtungsfehler der Umdrehungszahl proportional waren, was aus der folgenden Tabelle unmittelbar zu ersehen ist.

Tabelle 1.

Zylinder Nr. 3.

$\frac{u}{sec}$	Ausschlag	$\frac{a}{u}$
0,854	121,4	142,8
0,614	87,5	142,5
0,325	46,4	142,6

Der Absolutwert der Reibungskonstanten war durch Bestimmung der Direktionskraft des Drahtes an Körpern von

bekanntem Trägheitsmoment in der üblichen Weise ermittelt. Dabei war darauf geachtet, daß die Trägheitskörper von demselben Gewicht wie der aufgehängte Zylinder waren (ca. 130 g), um den von den elastischen Eigenschaften des Aufhängedrahtes abhängigen Wert der Direktionskraft unter gleichen Belastungsbedingungen wie bei den ausgeführten Versuchen zu ermitteln. Diese Messungen ergaben:

$$\text{Direktionskraft: } D = 37,75 \text{ g cm}^3 \text{ sec}^{-2},$$

$$\text{Reibungskonstante für Luft: } \mu = 0,000198 \text{ g cm}^{-1} \text{ sec}^{-1}.$$

Für Kohlensäure und Wasserstoff ergaben sich folgende Werte (μ Luft = 1 angenommen)

$$\frac{\mu_{\text{CO}_2}}{\mu_{\text{Luft}}} = 0,855,$$

$$\frac{\mu_{\text{H}_2}}{\mu_{\text{Luft}}} = 0,530.$$

In befriedigender Übereinstimmung mit den früheren zahlreichen Beobachtungen, die nach verschiedenen Methoden und durch verschiedene Autoren ausgeführt waren.

Wir gehen jetzt zur Beschreibung der Hauptversuche über. Jede Versuchsreihe war in folgender Weise ausgeführt: es war ein gegebener Druck hergestellt, die Nullage notiert, der Motor in Gang gesetzt und der stationäre Ausschlag abgelesen; wegen der Dämpfung (vgl. oben § 3) stellt sich der Ausschlag innerhalb 50 sec ein und bleibt vollkommen konstant, abgesehen von seltenen Schwankungen innerhalb 0,1 Skalenteile. Die Umdrehungsgeschwindigkeit wurde auf die oben angeführte Art bestimmt.

Die folgende Tabelle zeigt ein Beispiel der Beobachtungsprotokolle:

Tabelle 2.

Versuchsreihe Nr. 86. Zylinder Nr. 2. $p = 750 \text{ mm.}$
Skalenabstand 1085 mm.

0	α_1	0	α_2	0	α_1	0	α_2	0	α_2	0	α_2	0	α_1
33,50	27,30	33,50	39,89	33,51	27,29	33,51	39,87	33,51	27,29	33,51	39,88		
—	56"	—	56"	—	55,8"	—	56,0"	—	55,8"	—	55,8"	—	55,8"

Bei jedem hergestellten Drucke war die Ablenkung sechsmal gemessen, dreimal nach rechts und dreimal nach links (durch Umschaltung des Motors). Die zweite Zeile (Tab. 2)

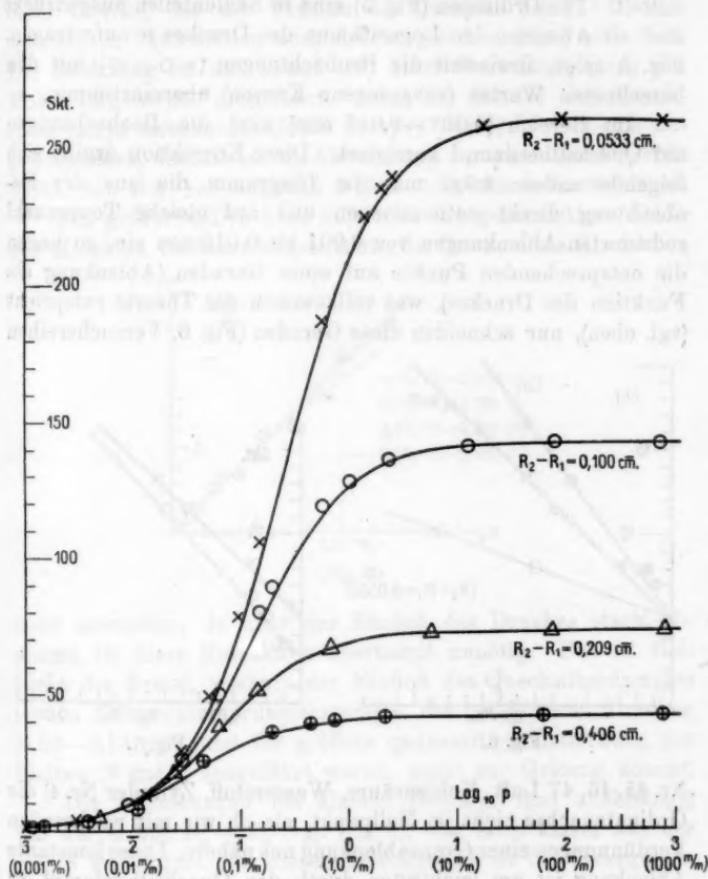


Fig. 5.

gibt die Zeit für 48 Umdrehungen. Die Ablenkungen sind dann auf 60 Umdr./Min. reduziert und zum Mittelwert vereinigt.

Die „berechneten“ Kurven waren folgendermaßen konstruiert: es war der Mittelwert des Temperatursprungs-

koeffizienten aus Lasareffs¹⁾ Messungen entnommen, der Koeffizient a_0 nach der Formel (10) berechnet und mit Hilfe (18) die vier Kurven für die vier obengenannten Zylinder ermittelt. Die Ordinaten (Fig. 5) sind in Skalenteilen ausgedrückt und als Abszisse der Logarithmus des Druckes p aufgetragen. Fig. 5 zeigt, inwieweit die Beobachtungen ($\times \circ \triangle \oplus$) mit den berechneten Werten (ausgezogene Kurven) übereinstimmen.

Im Bereich (0,001—0,015 mm) sind die Beobachtungen auf Quecksilberdampf korrigiert. Diese Korrektion ergibt sich folgendermaßen: trägt man im Diagramm die aus der Beobachtung direkt entnommenen und auf gleiche Tourenzahl reduzierten Ablenkungen von 0,001 bis 0,015 mm ein, so liegen die entsprechenden Punkte auf einer Geraden (Ablenkung als Funktion des Druckes), was vollkommen der Theorie entspricht (vgl. oben), nur schneiden diese Geraden (Fig. 6, Versuchsreihen

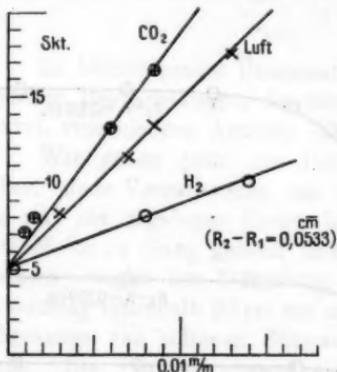


Fig. 6.

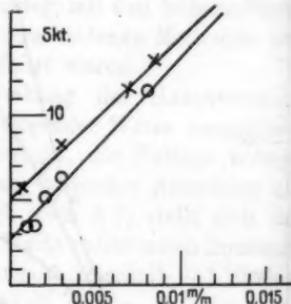


Fig. 7.

Nr. 45, 46, 47 Luft, Kohlensäure, Wasserstoff, Zylinder Nr. 4) die Ordinatenachse nicht im Nullpunkt, als ob wir mit wachsenden Verdünnungen einer Grenzablenkung uns nähern. Diese konstante Ablenkung ist am leichtesten durch den Quecksilberdampf zu erklären. Da im Intervall 0 bis 20° C. die Tension des Quecksilbers sich rasch ändert, so war ein Versuch ausgeführt mit durch Schnee abgekühltem Quecksilber; die Korrektion fällt dann um ungefähr 40 Proz. kleiner aus, wie aus der Fig. 7

1) P. Lasareff, I. e.

leicht ersichtlich ist, was eine wesentliche Stütze der obengenannten Hypothese bildet. Außerdem zeigt die Rechnung, daß der Bewegungsgrößentransport durch den Quecksilberdampf beim Drucke, der der Tension des Dampfes bei 17° C. entspricht, in Skalenteilen ausgedrückt gleich 4 (Skt.) sein muß. Die Rechnung ist auf Grund (11) unter Berücksichtigung des Molekulargewichts ausgeführt, dabei ist die für den Quecksilberdampf unbekannte Größe $2 - f/f$ der für Luft gleich angenommenen, deshalb ist die Abweichung der berechneten Größe 4 Skt. von der beobachteten 5 Skt. vollkommen zu erklären.

Bei größeren Drucken, falls man die gegenseitigen Stöße der Moleküle berücksichtigen muß, darf man diese Korrektion

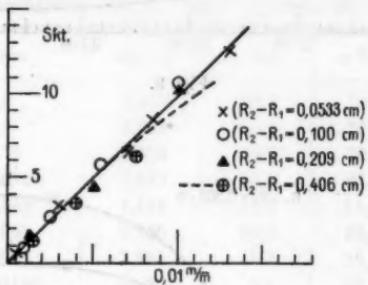


Fig. 8.

nicht anwenden, da aber der Einfluß des Druckes stark abnimmt, ist diese Korrektion überhaupt unnötig. Das ist vielleicht der Grund, weshalb der Einfluß des Quecksilberdampfes in den Temperatursprungmessungen, die bei höheren Drucken (0,60—0,14 mm) und für größere gegenseitige Entfernung der Platten (9 mm)¹⁾ ausgeführt waren, nicht zur Geltung kommt.

Die Ablenkungen bei kleinen Drucken sind unabhängig von der Größe $R_2 - R_1$ (vgl. Fig. 5), was noch klarer aus der Fig. 8 hervorgeht. In diesem Druckgebiet ist der Bewegungsgrößentransport dem Gasdruck proportional, was die Konstruktion eines, dem von Knudsen²⁾ ausgeführten „Absolutmanometer“ analogen, Instrumentes ermöglicht.³⁾

1) P. Lasareff, l. c. p. 241.

2) M. Knudsen, Ann. d. Phys. 32, p. 809. 1910.

3) Versuche in dieser Richtung werden vom Verfasser weitergeführt.

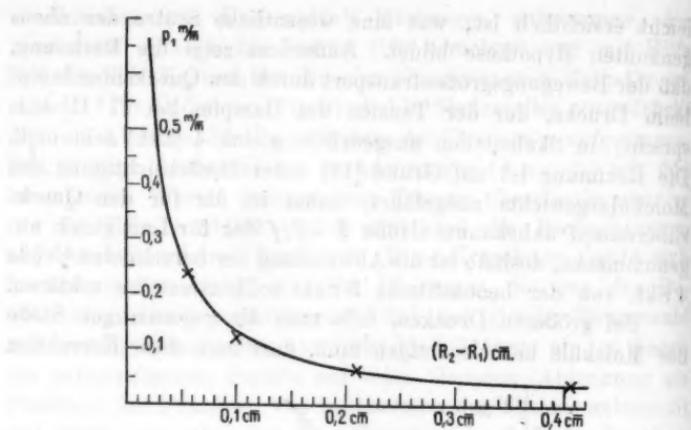


Fig. 9.

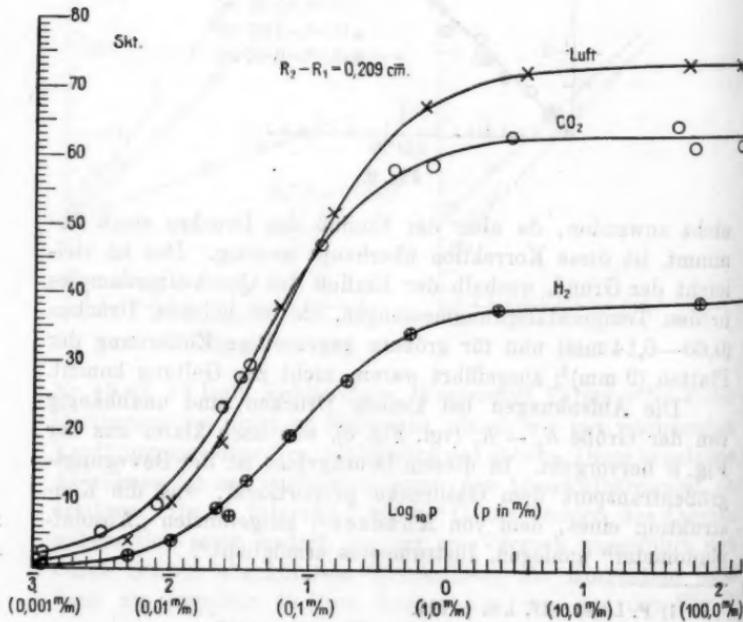


Fig. 10.

Die Kurve Fig. 9 zeigt die theoretische, durch das Experiment bestätigte, von Prof. P. Lebedew vermutete Beziehung zwischen dem Drucke p , der dem Inflectionspunkte der Kurve entspricht und der Größe $R_2 - R_1$ (vgl. 6" und weiter).

Die Kurven (Fig. 10) zeigen den Gang der Erscheinung in verschiedenen Gasen (Luft, Kohlensäure, Wasserstoff) für Zylinder Nr. 2 ($R_2 - R_1 = 0,209$ cm), wobei die ausgezogenen Kurven für Luft und Kohlensäure aus den Temperatursprungs-messungen von Lasareff berechnet sind. Die Übereinstimmung, wie man leicht einsieht, ist eine recht gute. Die folgenden Tabellen stellen die Resultate zahlenmäßig dar.

Tabelle 3.
Versuchsreihe Nr. 36. Luft. Zylinder Nr. 2.

p mm	$\log_{10} p$	α ber.	α beob.
750,0	2,875	73,2	73,3
73,0	1,863	73,2	73,1
8,75	0,574	72,0	72,2
0,675	1,829	67,0	67,3
0,145	1,161	51,0	51,7
0,061	0,785	35,0	38,3*
0,028	0,365	19,7	19,0
0,0105	0,022	8,5	10,0*
0,005	0,899	5,1	4,2*
0,0012	0,079	1,0	1,3*

Tabelle 4.
Versuchsreihe Nr. 37. CO_2 . Zylinder Nr. 2.

p mm	$\log_{10} p$	α ber.	α beob.
750,0	2,875	62,8	61,4
71,0	1,851	62,8	60,9
48,0	1,681	62,8	64,5
8,0	0,477	62,0	62,7
0,765	1,884	59,7	58,4
0,405	1,608	57,0	57,9
0,0865	0,562	29,2	29,8
0,0125	0,097	14,0	12,7*
0,003	0,477	4,5	5,0*
0,0012	0,079	2,0	1,9*

Die mit * bezeichneten Werte sind auf Quecksilberdampf korrigiert.

Nur mit Wasserstoff, für den aber die Temperaturursprungsmessungen bei verschiedenen Autoren stark auseinandergehen, habe ich keine befriedigende Übereinstimmung zwischen beobachteten und theoretischen Werten (aus dem Temperatursprung berechneten) gefunden, was aber den Verunreinigungen, die sicher in Gasen aus käuflichen Stahlzylindern vorhanden sind, zugeschrieben werden muß; deshalb ist die Kurve für Wasserstoff aus Experimenten direkt ermittelt.

Zusammenfassung.

1. Es wurde eine Methode der stationären Ablenkung ausgearbeitet, die eine genaue und bequeme Untersuchung der inneren Reibung im Druckintervall (760 bis 0,001 mm gestattet.

2. Es war auf Grund der Maxwell-Boltzmannschen gas-theoretischen Untersuchungen der Bewegungsgrößentransport G als Funktion des Druckes berechnet. Diese Rechnung zeigt:

a) Daß bei größeren Verdünnungen eine Gleitung an der Oberfläche fester Körper auftritt, deren Größe $a_0/p = c_0 \lambda$ der mittleren freien Weglänge λ direkt und somit dem Drucke p umgekehrt proportional ist.

b) Der Gleitungskoeffizient a_0 steht mit dem von Smoluchowski eingeführten Temperatursprungskoeffizient γp in der einfachen Beziehung $a_0 = \frac{8}{15} \gamma p$.

3. Es war auf Grund der Temperatursprungmessungen die Gleitungskonstante a_0 berechnet und die theoretische Kurve G (Bewegungsgrößentransport) als Funktion von $\log p$ konstruiert.

4. Die Versuche mit Luft und Kohlensäure stimmen mit den oben genannten berechneten Werten gut überein.

5. Ist die Verdünnung so weit getrieben, daß die mittlere freie Weglänge die Gasschichtdicke $d = R_2 - R_1$ übertrifft, so ist der Bewegungsgrößentransport von d unabhängig, was nur durch Molekulartheorie erklärt werden kann.

6. Die Kurve $G = f(\log p)$ hat einen Inflextionspunkt, der bei Drucken p_1 auftritt, die umgekehrt proportional der Gasschichtdicke d sind. Dieses Resultat war von Prof. P. Lebedew

vermutet; die Rechnungen, sowie die Versuche haben diese Vermutung vollkommen bestätigt.

Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich meinem verstorbenen Lehrer Prof. P. Lebedew und kann nicht ohne tiefste Empfindung des Dankes an das lebhafte Interesse, das mein hochverehrter Lehrer in den letzten Tagen seines Lebens dieser Untersuchung widmete, denken.

Es sei mir auch gestattet, an dieser Stelle dem Institut Solvey, der Ledenzoffschen Gesellschaft für Förderung der Experimentalwissenschaften und vielen Privatpersonen für die zugewandten nötigen Mittel, die eine weitere Tätigkeit des Lebedewschen Physikalischen Laboratoriums an der Städtischen Universität in Moskau ermöglichen, meinen wärmsten Dank auszusprechen.

in Moskau, Lebedewsches Physikalisches Laboratorium an
der Städtischen Universität, 21. Februar 1913.

(Eingegangen 3. März 1908.)

Nur mit Wasserstoff, für den aber die Temperaturursprungsmessungen bei verschiedenen Autoren stark auseinandergehen, habe ich keine befriedigende Übereinstimmung zwischen beobachteten und theoretischen Werten (aus dem Temperatursprung berechneten) gefunden, was aber den Verunreinigungen, die sicher in Gasen aus käuflichen Stahlzylindern vorhanden sind, zugeschrieben werden muß; deshalb ist die Kurve für Wasserstoff aus Experimenten direkt ermittelt.

Zusammenfassung.

1. Es wurde eine Methode der stationären Ablenkung ausgearbeitet, die eine genaue und bequeme Untersuchung der inneren Reibung im Druckintervall (760 bis 0,001 mm gestattet.

2. Es war auf Grund der Maxwell-Boltzmannschen gas theoretischen Untersuchungen der Bewegungsgrößentransport G als Funktion des Druckes berechnet. Diese Rechnung zeigt:

a) Daß bei größeren Verdünnungen eine Gleitung an der Oberfläche fester Körper auftritt, deren Größe $a_0/p = c_0 \lambda$ der mittleren freien Weglänge λ direkt und somit dem Drucke p umgekehrt proportional ist.

b) Der Gleitungskoeffizient a_0 steht mit dem von Smoluchowski eingeführten Temperatursprungskoeffizient γp in der einfachen Beziehung $a_0 = \frac{8}{15} \gamma p$.

3. Es war auf Grund der Temperatursprungsmessungen die Gleitungskonstante a_0 berechnet und die theoretische Kurve G (Bewegungsgrößentransport) als Funktion von $\log p$ konstruiert.

4. Die Versuche mit Luft und Kohlensäure stimmen mit den oben genannten berechneten Werten gut überein.

5. Ist die Verdünnung so weit getrieben, daß die mittlere freie Weglänge die Gasschichtdicke $d = R_2 - R_1$ übertrifft, so ist der Bewegungsgrößentransport von d unabhängig, was nur durch Molekulartheorie erklärt werden kann.

6. Die Kurve $G = f(\log p)$ hat einen Inflextionspunkt, der bei Drucken p_1 auftritt, die umgekehrt proportional der Gas schichtdicke d sind. Dieses Resultat war von Prof. P. Lebedew

vermutet; die Rechnungen, sowie die Versuche haben diese Vermutung vollkommen bestätigt.

Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich meinem verstorbenen Lehrer Prof. P. Lebedew und kann nicht ohne tiefste Empfindung des Dankes an das lebhafte Interesse, das mein hochverehrter Lehrer in den letzten Tagen seines Lebens dieser Untersuchung widmete, denken.

Es sei mir auch gestattet, an dieser Stelle dem Institut Soltveyl, der Ledenzoffschen Gesellschaft für Förderung der Experimentalwissenschaften und vielen Privatpersonen für die zugewandten nötigen Mittel, die eine weitere Tätigkeit des Lebedew'schen Physikalischen Laboratoriums an der Städtischen Universität in Moskau ermöglichen, meinen wärmsten Dank auszusprechen.

Moskau, Lebedew'sches Physikalisches Laboratorium an der Städtischen Universität, 21. Februar 1913.

(Eingegangen 3. März 1903.)

8. Über sekundäre elektrische Schwingungen;
von Karl F. Lindman.

A. Über die Entstehung „sekundärer“ elektrischer Schwingungen.

1. In seinem Buche „Die Optik der elektrischen Schwingungen“ (Leipzig 1898) widmet Righi ein ganzes Kapitel (p. 39—72) der Beschreibung seiner Versuche über „die von Resonatoren oder von dielektrischen Massen ausgesandten elektrischen Wellen“. Um die Wirkung zu erklären, welche ein in der Nähe des Wellenindikators gehaltener Resonator auf den Indikator ausübt, nimmt Righi an, „daß ein Resonator unter der Einwirkung elektrischer Wellen sich selbst wie ein Oszillatator verhält und Wellen erzeugt“, welche er „sekundäre Wellen“ nennt, und „welche ihrerseits imstande sind, in anderen Resonatoren Schwingungen hervorzurufen“. Als Indikator benutzte Righi (wie bei seinen übrigen Versuchen über Hertz-sche Wellen) einen geradlinigen Resonator (einen auf Glas niedergeschlagenen Silberstreifen) mit Funkenstrecke und als „sekundären Oszillatator“ entweder einen zweiten ähnlichen Resonator oder auch, wie er nebenbei erwähnt, einen einfachen Metalldraht von ungefähr derselben Länge wie dieser. „Auch in einem solchen Drahte entstehen nämlich,“ sagt er, „Resonanzschwingungen, welche sekundäre Wellen erzeugen, denn bis auf das Fehlen der Funken verhält derselbe sich ganz wie einer der gewöhnlichen Resonatoren.“ Unter anderem gibt er auch eine Versuchsanordnung an, welche „die Wirkung der sekundären Wellen auf einen der direkten Einwirkung des Oszillators entzogenen Resonators“ zu untersuchen erlaubt. Die Anordnung besteht einfach darin, daß der „sekundäre Oszillatator“ in geneigter Stellung zwischen den Primärleiter und den Indikator in die Nähe des letzteren gebracht wird, wenn die zuletzt genannten Instrumente zueinander senkrecht

stehen (die beiden Resonatoren müssen natürlich dann parallel zur Wellenebene orientiert sein).

In einer früheren Arbeit¹⁾ habe ich mich unter anderem auch derselben Versuchsanordnung bedient und die dabei beobachtete Wirkung auf ähnliche Weise wie Righi gedeutet. In seinen Bemerkungen zu einer einige Jahre später erschienenen Arbeit von Paetzold²⁾, in welcher auf diese meine Versuche Bezug genommen wird, wendet sich Hr. Aschkinass³⁾ gegen diese Auffassung. Er behauptet, daß es hier „offenbar in Wahrheit der Hauptsache nach von einer Sekundärstrahlung gar keine Rede“ sein kann. „Der einzelne Resonator vollzieht vielmehr,“ sagt er, „dieselbe Funktion wie ein Gitter, er zerlegt die ankommenden Schwingungen in zwei Komponenten und zur Beobachtung gelangt tatsächlich, wenigstens in erster Linie, ein Teil der Strahlung des *Erregers*“ (die zu dem linearen Sekundärleiter senkrechte Komponente der elektrischen Kraft). In einem kurz nachher erschienenen Artikel sagen dagegen die Herren Schaefer und Laugwitz⁴⁾, daß gegen die Auffassung, nach der ein Resonator als Sekundärerreger wirkt, „nicht das mindeste einzuwenden ist“. Die Wirkung eines aus Resonatoren zusammengesetzten Gitters erklären sie da-

1) K. F. Lindman, „Über stationäre elektrische Wellen“ (Akadem. Abh., Helsingfors 1901); im Auszug in Ann. d. Phys. 7. p. 824—850. 1902. — In dieser Arbeit hatte ich es übersehen, daß Righi außer seinen Funkenresonatoren auch einfache Metalldrähte als Erzeuger „sekundärer Wellen“ benutzt hatte.

2) M. Paetzold, Ann. d. Phys. 19. p. 116—137. 1906. — Durch einige seiner Versuche glaubte Hr. Paetzold den Beweis erbracht zu haben, daß ein Hertz'scher Erreger keine zusammengesetzte, sondern nur eine einfache Strahlung herausstende. Wie ich durch Hrn. Professor O. Wiener höre, hat sich Hr. Paetzold, der nach Fertigstellung seiner Arbeit in die Praxis ging, durch Stellen wie bei Garbasso, Journ. de Phys. 2. p. 260. 1893: „Si je ne me trompe, l'expérience peut décider entre les deux interprétations“, täuschen lassen und andere Stellen bei Aschkinass, Garbasso und Schaefer übersehen, aus denen die Anerkennung der Gleichberechtigung beider Standpunkte hervorgeht. Das dadurch bedingte Mißverständnis ist hauptsächlich der Anlaß zu den hinterher entstandenen Erörterungen gewesen und ist als solches auch in diesen Erörterungen anerkannt worden.

3) E. Aschkinass, Ann. d. Phys. 19. p. 841. 1906.

4) Cl. Schaefer u. M. Laugwitz, Ann. d. Phys. 20. p. 359. 1906.

durch, daß das Gitter, wenn seine Elemente von elektrischen Wellen erregt werden, sowohl nach vorn (nach dem Erreger hin) wie nach hinten (nach dem Meßresonator hin) strahlt. Da nun aber zwischen der erregenden und der erregten Schwingung eine Phasendifferenz besteht, so wird die durchgelassene Strahlung durch Interferenz geschwächt, während die nach vorn ausgestrahlten Sekundärwellen sich zu der am Gitter reflektierten Strahlung zusammensetzen. „Ohne die Existenz einer Strahlung der Resonatoren,“ sagen die genannten Herren, „wäre eine selektive Reflexion gar nicht denkbar.“ Diese Auffassung von der Wirkung eines Resonatorenfilters hat Hr. Schaefer¹⁾ später durch mathematische Betrachtungen im Anschluß zu einer von Planck²⁾ aufgestellten Theorie ausführlicher begründet, wobei er von der Strahlung eines einzelnen Resonators ausgeht.³⁾ Der Ansicht, daß die von Righi beschriebenen Wirkungen, welche im Strahlungsfelde eines Hertzschen Erregers befindliche Resonatoren aufeinander ausüben, von einer sekundären Strahlung herrühren, ist übrigens auch H. Poincaré⁴⁾ beigetreten.

1) Cl. Schaefer, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektronik 4. p. 274. 1907.
2) M. Planck, Wied. Ann. 57. p. 1. 1896 und 60. p. 577. 1897.

3) Man könnte vielleicht meinen, daß der Gegensatz zwischen den Standpunkten der Herren Schaefer und Aschkinass nur ein scheinbarer ist, weil die resultierende Wirkung hinter dem Gitter in beiden Fällen in einer Schwächung der zu den Gitterelementen parallelen Komponente der elektrischen Kraft besteht. Es besteht aber jedoch der wesentliche Unterschied, daß während die Schwächung hinter dem Gitter in dem einen Falle als eine von Sekundärwellen erzeugte Interferenzwirkung aufgefaßt wird, so würde sie in dem anderen Falle nur auf eine von den Gitterelementen ausgeübte Absorption (bzw. Reflexion) zurückzuführen sein, bei der die Sekundärwellen keine wesentliche Rolle spielen würden.

4) In seinem Buche „La théorie de Maxwell et les oscillations Hertziennes“ (Scientia) berichtet Poincaré über die oben erwähnten Righischen Versuche und bezeichnet dabei die betreffenden Erscheinungen als Wirkungen von „sekundären Wellen, welche von den Resonatoren emittiert werden“. Er erklärt das Entstehen dieser Sekundärwellen durch eine vom Resonator bewirkte „Diffraction“, die allerdings von der gewöhnlichen Diffraction sehr verschieden ist. Diese Diffraction analysiert, sagt er (p. 78), die komplexe Schwingung, welche mit der gedämpften primären Schwingung äquivalent ist, und läßt dabei nur diejenige Schwingungskomponente bestehen, welche mit der Eigenschwingung

2. Ich hatte schon längst die Absicht, auf die oben erwähnte Aschkinasssche Behauptung („Berichtigung“) zu entgegnen, obwohl dies damals nicht realisiert wurde. Indem ich jetzt die Ergebnisse einiger neuen mit Benutzung der auf p. 992 beschriebenen Anordnung ausgeführten Versuche veröffentlichte, sehe ich mich veranlaßt, auf die erörterte Frage etwas einzugehen, und zwar werde ich zuerst diejenigen meiner älteren (in Leipzig ausgeführten) und in meiner oben zitierten Arbeit beschriebenen Versuche hier kurz erwähnen und diskutieren, welche zu dieser Frage in Beziehung stehen, aber von Hrn. Aschkinass gar nicht berücksichtigt worden sind.

Als „Sekundärerreger“, der im folgenden mit R_1 bezeichnet werden soll, benutzte ich in den meisten Fällen einen mit Thermoelement versehenen geradlinigen Resonator von derselben Beschaffenheit wie der Meßresonator R_n . Falls diese Resonatoren senkrecht zu dem 10,1 cm langen stabförmigen Oszillatoren O (Wellenlänge $\lambda = 25$ cm) und senkrecht zu der Fortpflanzungsrichtung der primären Wellen orientiert waren, so übten (wenigstens bei nicht zu kurzem Abstande von O) diese Wellen keine merkbare Wirkung aus.¹⁾ Wurde aber der eine Resonator R_1 in der Nähe des zweiten R_n um 45° gegen ihn und den Oszillatoren geneigt, so gab das mit R_n verbundene Galvanometer recht beträchtliche Ausschläge, welche mit wachsendem Abstande zwischen R_1 und R_n jedoch schnell abnahmen. „In der Richtung gegen den Primärerreger hin und in der entgegengesetzten Richtung war die Intensität der „Sekundärwellen“ in gleichen Abständen vom Sekundärerreger dieselbe.“²⁾ Es war also gleichgültig, ob R_n hinter R_1 (im Verhältnis zu O) oder vor ihm stand. In dem letzten Falle mußten es jedenfalls von R_1 ausgehende Schwingungen sein,

des Resonators übereinstimmt (die übrigen Komponenten vernichten sich an derselben Stelle durch Interferenz). Der Resonator führt deshalb im allgemeinen einige Zeit fort zu schwingen, nachdem die primären Wellen ihn schon verlassen haben.

1) Um eine reine Wirkung, d. h. eine geradlinige Polarisation der Schwingungen zu erhalten, mußte bei der Konstruktion des Erregers und der Resonatoren verschiedene Umstände beachtet werden, die ich früher (l. c.) näher erörtert habe.

2) K. F. Lindman, Ann. d. Phys. 7. p. 836. 1902.

welche die Wirkung in R_{II} hervorriefen. Auch wenn man diese Schwingungen nur als reflektierte Primärwellen betrachten würde, so ließe es sich wohl kaum denken, daß die 25 cm langen Wellen nur in *einer* Richtung (gegen O hin) von dem 1 mm dicken Sekundärleiter reflektiert werden sollten; vielmehr müssen sie dann nach allen Seiten ziemlich gleichförmig zerstreut werden. Wenn R_{I} in geneigter Stellung vor R_{II} (in der Nähe von ihm) steht und also nur den mittelsten Teil von R_{II} „abschirmt“, so kann die Schwächung, welche die zu R_{I} parallele Komponente der primären elektrischen Wellen durch die von R_{I} ausgeübte Absorption erleidet, nicht viel in Betracht kommen. Nur dadurch wird es erklärlich, daß die Wirkung in R_{II} auf beiden Seiten von R_{I} dieselbe ist. Die Größe der in R_{II} erzeugten Wirkung, welche beim Abstande $R_{\text{I}}R_{\text{II}} = 1$ cm beinahe die Hälfte von derjenigen war, die in ihm erzeugt wurde, wenn man ihn bei Abwesenheit von R_{I} in eine um 45° gegen O geneigte Stellung gedreht hatte, spricht andererseits gegen die Auffassung, daß die durch R_{I} in R_{II} hervorgerufene Wirkung durch Schwingungen erzeugt werden könnte, die von R_{I} *symmetrisch* nach allen Seiten ausgehen würden (die gesamte Strahlungsenergie von R_{I} würde nämlich dann sogar größer als die von ihm aufgefangene Energie sein). Man gelangt deshalb zu der Vorstellung, daß die beiden in der Nähe voneinander befindlichen Leiter ein je nach ihrem gegenseitigen Abstande mehr oder weniger eng gekoppeltes System bilden, wobei R_{II} durch R_{I} „induktiv“ erregt wird, indem er eine verhältnismäßig große Anzahl der von R_{I} ausgehenden elektrischen Induktionslinien aufnimmt. Nur wenn R_{I} frei steht (wenn der Abstand $R_{\text{I}}R_{\text{II}}$ groß ist), so breiten sich diese Induktionslinien symmetrisch nach allen Seiten aus.

Daß in der Tat Schwingungen von meßbarer und den obigen Beobachtungen entsprechender Stärke von einem von elektrischen Wellen getroffenen Resonatordraht in einer beliebigen zum Draht senkrechten Richtung ausgehen, bewiesen die Interferenzversuche mit einem zweiten Resonator, der in verschiedene Lagen in der Umgebung des ersten Resonators geführt wurde und dessen eigene Ausstrahlung durch eingeschaltete sehr dünne Drähte größtenteils aufgehoben war. Durch diese Versuche, bei denen O , R_{I} und R_{II} alle zueinander

parallel waren, konnte nämlich eine sehr deutliche und regelmäßige Interferenz der von O und R_1 ausgehenden Wirkungen nachgewiesen werden. Es ergab sich insbesondere, daß, wenn R_1 zwischen O und R_{11} geführt wurde und alle diese Instrumente (wenigstens angenähert) isochron waren, ein Minimum von Wirkung in R_{11} nicht dann eintrat, wenn R_1 in einer geraden Linie mit O und R_{11} (in der Mitte zwischen ihnen) war, sondern dann, wenn R_1 um eine bestimmte Strecke seitwärts (senkrecht zu der Verbindungslinie OR_{11}) verschoben war. Für die durch die Umwandlung der Primärwellen in Sekundärwellen bedingte Phasenverzögerung erhielt ich einen Wert, der (wenigstens für Abstände von R_1 , die von der Größenordnung einer halben Wellenlänge oder etwas mehr waren) = ca. $\frac{3}{4}\pi$ ¹⁾ war.

Wenn bei der zuerst beschriebenen Versuchsanordnung (O und R_{11} gekreuzt, R_1 in geneigter Stellung zwischen ihnen) die Intensität der in R_1 erregten Schwingungen durch Einschaltung äußerst dünner Platin- oder Eisendrähte in die beiden Hälften von R_1 genügend verringert wurde, so wurde die Wirkung in R_{11} in hohem Grade herabgesetzt, obwohl R_{11} mit R_1 und O noch isochron war. Die Energie der in R_1 erzeugten Schwingungen wurde in diesem Falle größtenteils in Wärme umgewandelt, so daß die von R_1 ausgestrahlten Sekundärwellen nur sehr schwach sein konnten.

Eine ähnliche Aufhebung der Wirkung in R_{11} wurde auf folgende Weise erreicht. In der unmittelbaren Nähe des geneigten Resonators R_1 (der jetzt mit keinen besonderen Dämpfern versehen war) und parallel zu ihm wurde ein sehr

1) Eigentlich soll dies heißen, daß R_1 auf R_{11} so einwirke, als ob diese Phasenverzögerung = $\frac{3}{4}\pi$ sei. Um die Einwirkung seiner Resonatoren aufeinander zu erklären, nimmt Righi an, daß die betreffende Phasenverzögerung = π sei. Nach theoretischen Untersuchungen von Planck (l. c.) sollte sie aber = $\pi/2$ sein, wobei jedoch zu bemerken ist, daß die von Planck gemachte Annahme, daß der Abstand $R_1 R_{11}$ relativ groß ist und die Lineardimensionen des Sekundärreglers R_1 gegen die Wellenlänge verschwindend klein sind, für die obigen und die Righischen Versuche nicht zutreffend ist. Auch durch Interferenzversuche mit einem kreisförmig gebogenen Meßresonator habe ich für diese Phasenverzögerung einen Wert erhalten, der mit dem oben angegebenen Werte ($\frac{3}{4}\pi$) übereinstimmt.

langer Kupferdraht (dessen Enden zu Spiralen gewickelt waren) geführt. Der horizontale Meßresonator R_{II} gab dann nur minimale Ausschläge im Galvanometer gegen vorher. Nach dem Entfernen des als Sekundärerreger benutzten Resonators R_I übte der lange Kupferdraht allein fast keine Wirkung aus. Durch die enge Koppelung an dem angehängten Leiter vergrößerte sich zwar, wie durch besondere Versuche festgestellt wurde, die Schwingungsdauer von R_I etwas, aber jedoch gar nicht so viel (die halbe Wellenlänge nahm von 12,5 cm zu 14 cm zu), daß dies das angenäherte Aufhören der Galvanometerausschläge hätte verursachen können. Ein einziger Sekundärleiter (Resonator), dessen Länge dieser vergrößerten Wellenlänge entsprach, gab in der Tat eine viel stärkere Wirkung. Die soeben erwähnte Aufhebung der Wirkung in R_{II} deutete ich durch die Annahme, daß die von R_I ausgehende Strahlungsenergie größtenteils von dem benachbarten langen Metalldrahte aufgenommen und in Schwingungen von größerer Periode umgewandelt wurde (der Metalldraht wirkte dabei wahrscheinlich dämpfend auf die in R_I erregten Schwingungen ein; der Stromeffekt in R_I wurde aber doch durch die Anwesenheit des langen Metalldrahtes nur verhältnismäßig wenig vermindert).

In der betreffenden Arbeit habe ich eine Beobachtung beschrieben, welche ich als eine Wirkung (oder Rückwirkung) der von einem linearen Resonator ausgehenden Sekundärstrahlung erklärte. Als ich die Kurve der stehenden Wellen, die durch Reflexion an einem großen Metallspiegel erzeugt wurden, mittels eines geradlinigen „Thermoresonators“ aufnahm, fand ich das erste Maximum der elektrischen Kraft nicht in der Mitte zwischen dem Spiegel und dem ersten Minimum vor ihm, sondern bedeutend näher am Spiegel. Diese Verschiebung des ersten Maximums konnte dadurch aufgehoben werden, daß dem Resonator ein langer Metalldraht (vermittelst zweier dünner Korksscheiben) angehängt wurde, sowie auch dadurch, daß dünne Platin- oder Eisendrähte in die beiden Hälften des Resonators eingeschaltet wurden (auch wenn der Resonator eine kreisförmige, nahezu geschlossene Form hatte, war die erwähnte Verschiebung bedeutend geringer als wenn der Resonator geradlinig war). Die Annahme, daß die genannte Verschiebung des ersten Maximums der elektrischen

Kraft auf die am Spiegel reflektierte Sekundärstrahlung des Resonators beruhe, erklärt, wie ich früher gezeigt habe, alle Einzelheiten dieser Erscheinung.¹⁾ Falls nun der Resonator, wenn er zum Oszillatator parallel ist, tatsächlich eine in Betracht kommende Sekundärstrahlung erzeugt (wie dies auch aus den oben erwähnten Interferenzversuchen hervorgeht), so muß dies auch der Fall sein, wenn er um etwa 45° gegen den Oszillatator geneigt ist, obwohl die Intensität der Sekundärstrahlung dann entsprechend kleiner ist.

Als O , R_1 und R_{11} zueinander parallel waren und R_{11} hinter R_1 stand, wurde die Wirkung in R_{11} durch die Anwesenheit von R_1 verstärkt, falls die Eigenperiode von R_1 etwas kleiner als die von R_{11} (und O) war (vgl. die ungekürzte Abhandlung p. 41 u. 42). Bei wachsender Eigenperiode von R_1 trat in der Nähe des Isochronismus zwischen R_1 und R_{11} eine Schwächung der Wirkung in R_{11} ziemlich plötzlich ein. Diese Schwächung war am größten, wenn die Eigenperiode von R_1 ein wenig größer als die von R_{11} war, und nahm nachher (bei Verlängerung von R_1) allmählich ab, indem sie sich einem gewissen Grenzwerte näherte. Diese Wirkungen (sowohl die Schwächung als auch die Verstärkung) lassen sich als Interferenzerscheinungen auffassen, wobei man die durch die Umwandlung der primären Wellen in Sekundärschwingungen bedingte von der Eigenschwingungsdauer des Sekundärerregers abhängige Phasendifferenz der beiden in R_{11} interferierenden Schwingungssysteme in Betracht zu ziehen hat unter Beachtung, daß es um R_1 gebeugte Primärwellen sind, welche mit den Sekundärschwingungen in R_{11} interferieren.²⁾ Die Erscheinung wird jedoch dadurch kompliziert, daß die Schwingungen in R_{11} ihrerseits auf die Vorgänge in R_1 einwirken (wenn R_1

1) Gegen diese Auffassung, nach der ein in der Nähe eines Metallspiegels befindlicher offener Resonator mit sich selbst ein gekoppeltes System bildet, hatte auch der verstorbene Prof. L. Boltzmann, wie er mir ausdrücklich sagte, nichts einzuwenden.

2) Die primären und die sekundären Schwingungen sind allerdings im allgemeinen von verschiedener Periode, aber beide erregen in R_{11} Schwingungen, deren Perioden sich nach der Eigenperiode von R_{11} richten. Außerdem dürften wenigstens die Sekundärwellen Schwingungen von ihrer eigenen Periode im Maßresonator erregen, weshalb die in ihm resultierenden Schwingungen als Schwebungen bezeichnet werden können.

in geneigter Stellung zwischen gekreuzten O und R steht, so dürfte diese Rückwirkung bedeutend geringer sein). R_1 und R_{11} bilden ein schwingendes System, dessen Bestandteile im allgemeinen zusammen mehr Energie auffangen, als jeder von ihnen auffängt, wenn er einsam sich im Strahlungsfelde des Erregers befindet. Ein Teil der von R_1 oder R_{11} aufgefangenen und wieder frei werdenden Energie kann unter Umständen auf den anderen von ihnen (durch Sekundärschwingungen) so übertragen werden, daß die Schwingungen des letzteren sogar verstärkt werden.¹⁾ Wenn eine Verstärkung vorhanden ist, so nimmt diese, wie ich beobachtet habe, mit wachsendem Abstande zwischen den beiden Sekundärleitern ab und kann unter Umständen, nämlich wenn die Koppelung zwischen Primär- und Sekundärerreger eng ist (falls der Abstand OR_1 nur einige Zentimeter beträgt), in eine Schwächung übergehen.

1) Man könnte vielleicht meinen, daß ein Resonator stets eine schwächende Einwirkung auf einen anderen hinter ihm stehenden Resonator ausüben sollte, da er immer einen Teil der Energie der auffallenden Wellen absorbiert oder zerstreut. Die Erfahrung lehrt jedoch, wie schon erwähnt, daß dies nicht der Fall zu sein braucht und, wie ich oben angedeutet habe, steht diese Erfahrung auch nicht im Widerspruch zu dem Energieprinzip. Anders verhält es sich dagegen, wenn ein begrenztes Strahlenbündel durch ein Resonatorenfilter geht und das ganze durchgelassene Strahlenbündel auf einen mit parabolischem Reflektor versehenen Meßresonator einwirkt. Das Gitter und der Meßresonator fangen dann zusammen nicht mehr Strahlungsenergie auf als der Meßresonator in Abwesenheit des Gitters auffängt, und wegen der am Gitter stattfindenden Reflexion (bzw. Umwandlung in Wärme) muß das Gitter unter diesen Umständen stets die durchgehende Strahlung schwächen. Dies wird auch, wie ich durch besondere Versuche festgestellt habe, durch die Erfahrung bestätigt. Die beim Durchgang elektrischer Wellen durch ein Resonatorenfilter erzeugte Vermehrung der im Empfänger erzeugten Wirkung, welche ich in einem Falle (und zwar wenn die Eigenperiode der Gitterelemente etwas kleiner als die des Oszillators war) beobachtete, konnte durch eine verbesserte Abblendung der Randstrahlen beseitigt bzw. in eine Schwächung umgewandelt werden (vgl. meine Abhandlung „Über das selektive Absorptions- und Reflexionsvermögen elektrischer Resonatorenysteme“, Finska Vet. Soc. Öfversigt 52. A. 10. p. 33. 1909/10). Eine von Paetzold (l. c.) beobachtete von einem Resonatorenfilter erzeugte Vermehrung der durchgelassenen Intensität dürfte also auch auf eine ungenügende Abschirmung der seitlichen Strahlen zurückzuführen sein (durch Einschaltung des Gitters wurden wahrscheinlich mehr Strahlen aufgefangen als vorher in Abwesenheit des Gitters).

Wenn R_1 nur diejenige Rolle spielen würde, welche Hr. Aschkinass diesem Leiter zuteilt (d. h. wenn R_1 hauptsächlich nur eine Schwächung der zu ihm parallelen Komponente der primären Wellen ausüben würde), so ließe sich jedenfalls die hier beschriebene Verstärkung dadurch nicht erklären.

Wenn bei der zuerst erwähnten Versuchsanordnung (R_1 in geneigter Stellung zwischen gekreuzten O und R_{11}) die Länge von R_{11} verändert wurde, so erhielt ich eine Resonanzkurve, welche, falls R_1 entweder ein gewöhnlicher linearer Meßresonator oder ein nicht unterbrochener Draht war, eine geringere Dämpfung der auf R_{11} wirkenden Schwingungen anzeigte als diejenige Resonanzkurve, welche O direkt ergab. Als R_{11} mit O isochrom war und die Länge von R_1 variiert wurde, erhielt ich stets die maximale Wirkung, wenn R_1 mit O isochron war. Waren aber R_1 und O nicht isochron, so richtete sich, wie die Resonanzversuche zeigten, die Wellenlänge der auf R_{11} wirkenden Schwingungen stets hauptsächlich nach der Eigenperiode von R_1 . Die Dämpfung dieser Schwingungen nahm zu und ihre Intensität ab, wenn dünne Platina- oder Eisendrähte in R_1 eingeschaltet wurden oder wenn als „Sekundärerreger“ (R_1) ein durch eine Funkenstrecke unterbrochener Sekundärleiter (Righischer Resonator) von derselben Periode benutzt wurde.

Aus allen diesen Versuchen geht übereinstimmend hervor, daß wenn ein geradliniger Resonator sich im Strahlungsfelde eines Hertzschen Erregers befindet und dabei Schwingungen in ihm erregt werden, so bildet er den Ausgangspunkt von Schwingungen, welche mit den primären Schwingungen nicht identisch sind und welche deshalb als Sekundärschwingungen bezeichnet werden können. Daß diejenigen Schwingungen, welche den gegen O gekreuzten Meßresonator erregen, wenn der „Sekundärerreger“ in geneigter Stellung vor ihm steht, im allgemeinen mit bezug auf Periode und Dämpfung von den primären Schwingungen abweichen, bildet allerdings allein für sich keinen Beweis für die Ansicht, daß sie vom „Sekundärerreger“ emittiert werden, obwohl die übrigen oben mitgeteilten Versuche auf andere Weise kaum erklärt werden können. Weil nämlich die gedämpfte Strahlung des Primärerregers mit einem kontinuierlichen Spektrum unendlich vieler ungedämpfter Schwingungen äquivalent ist, kann man sich vorstellen, daß der ge-

neigte Sekundärleiter nur diejenigen zu ihm parallelen Schwingungskomponenten absorbiert bzw. zerstreut, welche mit seinen eigenen Schwingungen übereinstimmen. Zur Beobachtung könnten dann die entsprechenden zum Sekundärerreger senkrechten ungeschwächten Komponenten der primären Strahlung gelangen. Daß eine derartige Wirkung vorhanden ist und daß sie bei einem aus vielen Resonatoren bestehenden geneigten Gitter neben den von den Gitterelementen emittierten Schwingungen in Betracht zu ziehen ist, will ich keineswegs verneinen. Bei einem aus einem einzigen Resonator bestehenden „Sekundärerreger“ scheint aber diese Wirkung im allgemeinen nur eine untergeordnete Rolle zu spielen.

3. Um die Richtigkeit dieser Auffassung weiter zu prüfen, habe ich versucht, die Richtung der elektrischen Kraft derjenigen Schwingungen experimentell zu bestimmen, welche bei der oft erwähnten Versuchsanordnung die Wirkung in dem gegen O gekreuzten Meßresonator erzeugten. Nach Hrn. Aschkinass muß nämlich der elektrische Vektor dieser Schwingungen zu R_i senkrecht sein, während er nach der hier vertretenen Ansicht zu R_i parallel wäre.

Sowohl bei diesen wie bei den später beschriebenen Versuchen habe ich mich derjenigen neuen Apparate und der Messungsmethode bedient, die ich früher in einer anderen Arbeit¹⁾ beschrieben habe. Bei den Versuchen über die Schwingungsrichtung der von einem geneigten Sekundärleiter erzeugten sekundären Schwingungen war die halbe Wellenlänge der von dem stabförmigen mit Reflektor versehenen Oszillatoren O ausgehenden primären Wellen = 18 cm. Der geradlinige mit O isochrone Meßresonator R_{ii} , der in Verbindung mit einem Galvanometer stand, zeigte, wenn er einen Winkel von 90° mit O und der Strahlenrichtung bildete, keine merkbare Wirkung (vorausgesetzt, daß der Abstand OR nicht sehr kurz war). Als R_{ii} zu O parallel war und der Abstand OR_{ii} ca. 1,5 m betrug, gab das mit R_{ii} verbundene Galvanometer einen Ausschlag von 29 mm (die Ausschläge des Standardindikators lasse ich hier unberücksichtigt, weil sie bei diesen Messungen fast ganz konstant waren). Wurde aber

1) K. F. Lindman, Ann. d. Phys. 38. p. 523. 1912.

ein 11,8 cm langer und 1,2 cm dicker Kupferdraht als „Sekundärerreger“ R_1 vor R_{11} und parallel zu ihm in einer Entfernung $R_1 R_{11} = 4,5$ cm gestellt, so vergrößerte sich die Wirkung in R_{11} um ca. 90 Proz. Bei wachsendem Abstande zwischen R_1 und R_{11} nahm diese Wirkung ab, so daß sie beim Abstande $R_1 R_{11} = 25$ cm schon fast unmerklich war. Als R_{11} zu O senkrecht war und R_1 beim Abstande $R_1 R_{11} = 4,5$ mm einen Winkel von 45° mit O und R_{11} bildete, war die Wirkung in R_{11} gleich 4 mm Galvanometerausschlag. Ein aus langen Kupferdrähten bestehendes Hertzaches Gitter (Abstand der Drähte = 5 mm, Dicke der Drähte = 0,7 mm) wurde dann zwischen R_1 und R_{11} (in der Mitte zwischen ihnen) senkrecht zur Strahlenrichtung so eingeschaltet, daß die Gitterdrähte zu dem geneigten Sekundärleiter R_1 senkrecht waren. Der Meßresonator R_{11} , welcher fortwährend zu O senkrecht war, gab jetzt einen Ausschlag von 16 mm. Nach Entfernung von R_1 war die durch das geneigte Gitter erzeugte Wirkung in R_{11} gleich 5 mm. Obwohl das Gitter keine zu R_{11} senkrechte Komponente der elektrischen Kraft hindurchließ, war also die von R_1 erzeugte verstärkende Wirkung durch das Gitter gegangen, d. h. die elektrische Kraft der Sekundärschwingungen war zu R_1 parallel. Aus der Größe dieser verstärkenden Wirkung ergibt sich, daß von einer von R_1 ausgeübten Schirmwirkung in diesem Falle kaum die Rede sein kann (daß die Verstärkung, welche beobachtet wurde, wenn R_{11} zu R_1 parallel stand, im Verhältnis dazu geringer war, beruht, wenigstens zum Teil, auf der Verschiedenheit der Amplituden der in R_{11} dann interferierenden Schwingungen). Die Versuche mit etwas längeren vor dem geneigten Gitter gehaltenen Sekundärleitern (R_1), welche eine Schwächung in R_{11} erzeugten, waren ohne Bedeutung, weil diese Schwächung nach Hrn. Aschkinass immer als eine von R_1 ausgeübte Absorption gedeutet werden könnte. Es gibt aber keinen Grund anzunehmen, daß die von den längeren geneigten Sekundärleitern erzeugten Schwingungen, welche auf R_{11} einwirken, sich mit Bezug auf Schwingungsrichtung anders verhalten als die von den kürzeren Leitern hervorgerufenen Schwingungen.¹⁾

1) Um eine Verstärkung der mit einem zu O parallelen Resonator R_{11} gemessenen Intensität zu erhalten, ist es nicht nötig, daß der „Sekundär-

4. Schließlich mag hier noch ein Versuch erwähnt werden, aus dem hervorgeht, daß die Schwingungen in einem Resonator von einem benachbarten der direkten Einwirkung der primären Wellen entzogenen Resonator beeinflußt werden. Der mit den primären Wellen ($\lambda/2 = 13$ cm) isochrone Meßresonator R war in geneigter Stellung senkrecht zur Strahlenrichtung aufgestellt (O und R bildeten dabei einen Winkel von 45° miteinander). Wenn dann ein geradliniger Metalldraht D in horizontaler Stellung (senkrecht zu O) und senkrecht zur Strahlenrichtung vor oder hinter R in der Nähe von ihm gehalten wurde, so vergrößerte sich die Intensität der in R erregten Schwingungen, und zwar war diese Intensitätsvermehrung um so größer, je kürzer der Abstand zwischen D und R war und je näher die Eigenperiode von D mit der von R übereinstimmte. Als D aus einem 1,2 mm dicken Kupferdrahte bestand und der Abstand zwischen D und dem hinter ihm stehenden Meßresonator R 2 cm betrug, erhielt ich durch Variieren der Länge von D die Kurve I in Fig. 1, worin die

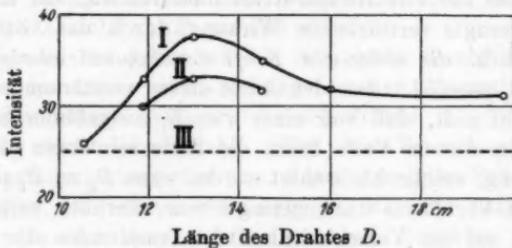


Fig. 1.

Gerade III die in Abwesenheit von D gemessene Intensität darstellt. Bei maximaler Resonanz betrug also die Intensitätsvermehrung ca. 50 Proz. Die Kurve II gibt die mit R gemessene Intensität in dem Falle an, daß D aus einem 0,5 mm

erreger" R_1 stabförmig ist. Als der 11,8 cm lange Kupferdraht eine nicht geschlossene kreisförmige oder rechteckige Form erhalten hatte und vor R_1 parallel zur Schwingungsebene geführt wurde, konnte eine deutliche, obwohl sehr geringe Verstärkung der in R_1 erzeugten Wirkung beobachtet werden. Bei wachsender Länge und Eigenperiode von R_1 ging diese Verstärkung in eine Schwächung über.

dicken Eisendrahte bestand. Der dünne Eisendraht bewirkte demnach eine etwas geringere Intensitätsvermehrung als der Kupferdraht.

Da der zu O senkrecht orientierte Draht D keinen Einfluß auf die primären Wellen ausübte, konnte es nicht irgend eine Komponente der primären Wellen sein, welche die betreffende Wirkung erzeugte, und folglich kann die Ursache dazu nur in einer *gegenseitigen Einwirkung der beiden Resonatoren aufeinander* gesucht werden. Die Verstärkung läßt sich vielleicht dadurch erklären, daß der als Sekundärerreger wirkende Meßresonator Schwebungen in dem benachbarten Leiter erregt, wobei dieser einen Teil der von ihm aufgenommenen Energie an den Sekundärerreger wieder abgibt, so daß die mit ihm gemessene Intensität dadurch verstärkt werden kann. Eine derartige Wirkung scheint in der Tat möglich zu sein, wenn die Koppelung zwischen Primär- und Sekundärsystem (Meßresonator und dem benachbarten Leiter) relativ fest ist (vgl. z. B. J. Zenneck, Elektromagnetische Schwingungen und drahtlose Telegraphie, p. 665. 1905).

B. Versuche über die Wellenlänge und die Dämpfung sekundärer elektrischer Schwingungen.

5. Durch eine Reihe neuer Versuche habe ich meine älteren Versuche über die Wellenlänge und die Dämpfung der von einem Sekundärleiter ausgehenden Schwingungen ergänzt. Die halbe Wellenlänge der primären Wellen, welche von dem stabförmigen mit zylindrisch-parabolischem Reflektor versehenen Oszillatator O emittiert wurden, war bei diesen Versuchen angenähert = 24 cm (durch Messung mit einem Resonator, der in maximaler Resonanz mit O stand, erhielt ich für die halbe Wellenlänge den Wert 24,2 bis 24,3 cm; die objektiv vorkommenden stehenden elektrischen Wellen, die sich bei einer anderen Gelegenheit mit Benutzung desselben Erregers nachgewiesen habe¹⁾, gaben in Übereinstimmung damit für die halbe Wellenlänge der Grundschwingung des primären Erregers einen Wert = 24 cm). Als Standardindikator wurde ein kreisförmig gebogener, seitwärts aufgestellter Resonator benutzt.

1) Ann. d. Phys. 38. p. 523. 1912.

Als die primären Wellen unter normaler Inzidenz an einem ebenen, um 140 cm von O entfernten Metallspiegel reflektiert wurden und die dabei erzeugten stehenden Wellen mit einem geradlinigen, 19,4 cm langen (mit O nicht isochronen) Meßresonator untersucht wurden, ergab sich ein Minimum der elektrischen Kraft im Abstande 21,5 cm vom Spiegel (Kurve I in Fig. 2; die Höhenskala dieser Kurve ist in Fig. 2 um 10 mal verkleinert worden). Durch Vergrößerung des Abstandes zwischen Spiegel und Erreger um $\frac{1}{2}\lambda$ hatte ich festgestellt, daß mehrfache Reflexionen keine merkbare Störung hervorriefen. Es wurde dann ein 24,5 cm langer und 1,2 mm dicker Kupferdraht R_i in geneigter Stellung zwischen den Spiegel und den vertikal orientierten Erreger im Abstande 62,5 cm vom Spiegel gebracht und gleichzeitig wurde der zur

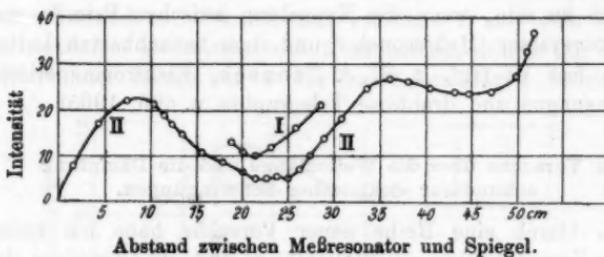
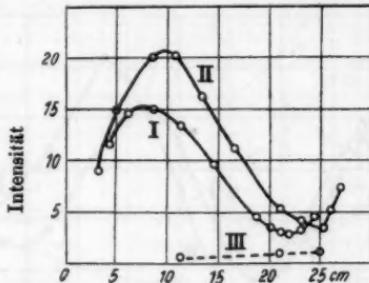


Fig. 2.

Strahlenrichtung senkrechte Meßresonator R_{II} um 90° gegen O gedreht (das Rohr, wodurch die Zuleitungsdrähte von R_{II} gingen, war durch eine kleine, in der Mitte des Spiegels angebrachte Öffnung geführt). Durch Variieren des Abstandes zwischen Spiegel und Meßresonator erhielt ich die Intensitätskurve II in Fig. 2, welche zwei benachbarte und ungefähr gleich stark ausgebildete Minima in den Entfernung 21,5 und 25 cm vom Spiegel aufweist. Diese Minima scheinen von zwei ungefähr gleich stark gedämpften Wellensystemen herzurühren, von denen das eine durch die Eigenschwingungen von R_{II} und das andere durch die von R_i bedingt sind. Die von R_i ausgehenden Sekundärschwingungen waren demnach schwächer gedämpft als die primären Wellen, welche bei den

mit R_{II} gemessenen stehenden Wellen (Kurve I) keine ihrer eigenen Periode entsprechenden Minima erzeugten.

6. Um die Dämpfung der Eigenschwingungen von R_{II} zu vergrößern, wurden zwei etwa 1 cm lange und 0,02 mm dicke Eisendrähte in je eine Hälfte von R_{II} eingeschaltet. Durch Wellenlängenmessungen mit diesem Resonator wurde festgestellt, daß die Dämpfung von R_{II} jetzt zwar bedeutend größer als vorher, aber immer noch kleiner als die von O war (die mit R_{II} gemessene Wellenlänge richtete sich noch hauptsächlich nach der Periode von R_{II}). Als R_{II} 18,2 cm lang und zu O parallel war, erhielt ich die Kurve I in Fig. 3 (die Ordinaten dieser Kurve bezeichnen wieder $1/10$ der beobachteten



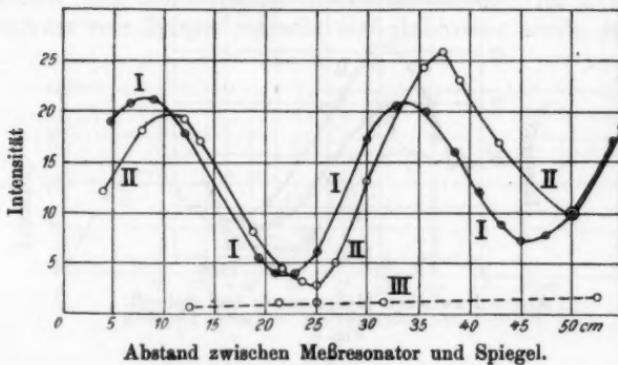
Abstand zwischen Meßresonator und Spiegel.

Fig. 3.

Intensität). Die Lage des Minimums gibt für die halbe Wellenlänge einen Wert von ca. 22 cm. Nach Einschaltung des 24,5 cm langen drahtförmigen Sekundärerregers R_I in geneigter Stellung zwischen R_{II} und O in einem Abstande = ca. 40 cm vom Spiegel gab R_{II} , der jetzt horizontal orientiert war, die Intensitätskurve II (die Kurve III gibt die in Abwesenheit von R_I mit dem horizontalen Meßresonator gemessene direkte Wirkung der primären Wellen an; die Höhenskala der Kurven II und III ist die in der Figur angegebene). Für die Lage des jetzt eindeutig bestimmten Minimums (in der Entfernung 25 cm vom Spiegel), war die Eigenperiode des Sekundärerregers R_I und nicht die des Meßresonators maßgebend. Das erste Maximum der elektrischen Kraft, das schon bei der Kurve I vom Spiegel weiter entfernt war als das entsprechende

mit dem ursprünglichen (mit keinen besonderen Dämpfern versehenen) Resonator gemessene Maximum, war auch jetzt der Lage des objektiv vorkommenden Maximums ziemlich nahe gekommen.

Um die objektiv vorkommenden stehenden elektrischen Sekundärwellen, welche durch diese Versuche schon nachgewiesen worden waren, noch deutlicher hervortreten zu lassen, wiederholte ich die letzten Versuche mit der Veränderung, daß der Abstand des jetzt 25 cm langen Sekundärerregers vom Oszillator zu 37,5 cm verkleinert wurde. Der Abstand zwischen Sekundärerregen und Spiegel war dabei = 87,5 cm. Die dann erhaltenen Sekundärwellen werden durch die Kurve II in Fig. 4 dargestellt, während die Kurve I in derselben Figur die



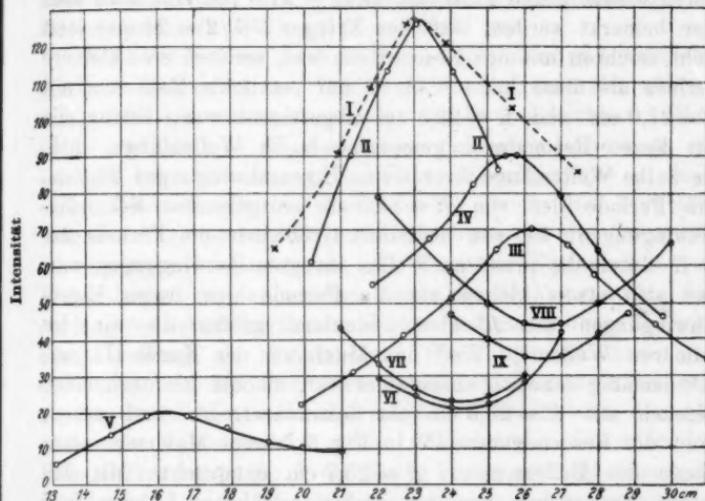
Abstand zwischen Meßresonator und Spiegel.

Fig. 4.

in Abwesenheit von R_i aufgenommenen, von den primären Schwingungen (R_u parallel zu O) erzeugten stehenden Wellen angibt (die Kurve III hat eine analoge Bedeutung wie die Kurve III in Fig. 3; die Höhenskala der Kurve I ist, wie in Fig. 3, um 10 mal verkleinert worden).

7. Als ein geradliniger Meßresonator R von der gewöhnlichen Form (d. h. ein mit keinen besonderen Dämpfungsdrähten versehenen Resonator) zu O parallel war, erhielt ich durch Variieren der Länge von R (durch Abschneiden seiner Enden) die Resonanzkurve I in Fig. 5. Die maximale Wirkung entsprach also einer Resonatorlänge von ca. 23 cm. Ein zweiter geradliniger Meßresonator R' (mit Thermoelement in

seiner Mitte), dessen Länge durch dünne verschiebbare Zylinder aus Kupferblech verändert werden konnte, war bei maximaler Resonanz 22,5 cm lang. Der 22,5 cm lange Resonator R' wurde als Sekundärerreger in geneigter Stellung zwischen gekreuzten O und R benutzt, wobei der Abstand $R'R = 3,5$ cm war. Durch Veränderung der Länge von R erhielt ich dann



Länge des Meßresonators R_{II} (für die Kurven VI—IX Abstand zwischen Meßresonator und Spiegel).

Fig. 5.

die Resonanzkurve II in Fig. 5, deren Maximum der Abszisse 23,2 cm entspricht und welche in Übereinstimmung mit dem schon früher (p. 1006) Gesagten eine geringere Dämpfung der auf R wirkenden Schwingungen anzeigt als die Kurve I (des Vergleichs wegen ist die Kurve I auf eine ebenso große maximale Ordinate wie die der Kurve II reduziert worden). Die mit $R' = 22,5$ cm nach der Methode mit stehenden Wellen ($R' \parallel$ zu O) gemessene halbe Wellenlänge war = 24,3 cm (siehe das Kurvenstück VI¹⁾ in Fig. 5), und für die mit $R = 23,2$ cm auf die-

1) Wie unter der Figur angedeutet ist, bezeichnen die Abszissen der Kurven VI—IX die Abstände zwischen Spiegel und Meßresonator.

selbe Weise gemessene halbe Wellenlänge fand ich genau denselben Wert (Kurve VII in Fig. 5).

Als $R' = 27,0$ cm lang war, gab er als Sekundärerreger in geneigter Stellung (die Resonanzkurve III in Fig. 5, deren Maximum der Abszisse $R = 26,3$ cm entspricht. Die mit $R' = 27,0$ und $R = 26,3$ gemessenen halben Wellenlängen waren wieder gleich groß und zwar = 27,0 cm. Es muß aber hier bemerkt werden, daß der Erreger $O(\lambda/2 = 24$ cm) jetzt nicht isochron mit den Resonatoren war, sondern eine kleinere Periode als diese hatte. Als O auf maximale Resonanz mit $R' = 27,0$ cm und $R = 26,3$ cm abgestimmt war, betrug die mit diesen Resonatoren gemessene halbe Wellenlänge, d. h. die halbe Wellenlänge ihrer freien Eigenschwingungen 28,1 cm. Die Periode der von $R' = 27,0$ cm ausgehenden Sekundärschwingungen, die von derselben Größe wie die Periode der in R' durch die primären Wellen erregten Schwingungen war, war also etwas kleiner als die Periode der freien Eigenschwingungen von R' aber bedeutend größer als die der primären Wellen.¹⁾ Weil das Maximum der Kurve III verhältnismäßig schwach ausgebildet war, machte ich noch einen Versuch mit $R' = 25,6$ cm als Sekundärerreger und erhielt dann die Resonanzkurve IV in Fig. 5, deren Maximum einer Länge des Meßresonators $R = 25,7$ cm entspricht. Mit den beiden Resonatoren von den soeben erwähnten Längen fand ich wieder, wenn diese Resonatoren von den primären Wellen ($\lambda/2 = 24$ cm) erregt wurden, gleiche Werte für die halbe Wellenlänge und zwar 26,5 cm (siehe die Kuven VIII und IX, von denen jene $R' = 25,6$ cm und diese $R = 25,7$ cm entsprechen). Die Eigenperiode der Resonatoren machte sich also jetzt etwas mehr geltend als im vorigen Falle ($R' = 27$ cm), und gleichzeitig war auch die Resonanz (Kurve IV in Fig. 5) ein wenig schärfer ausgebildet.

Die Kurve V in Fig. 5 bezieht sich auf den Fall, wo R'

1) Diese und die nachher beschriebenen Beobachtungen, welche schon vor mehreren Jahren (im Herbst 1908) gemacht wurden, bildeten den Ausgangspunkt für Versuche über den Einfluß der primären Wellen auf die mit einem geradlinigen mit ihnen nicht isochronen Resonator gemessene Wellenlänge, deren Ergebnisse ich in einer anderen Arbeit (Ann. d. Phys. 38. p. 523. 1912) beschrieben habe.

(der jetzt ohne Zusatzröhren benutzt wurde) 16,7 cm lang war. Die maximale Wirkung der Sekundärschwingungen entsprach also jetzt einer Resonatorlänge $R = 16,3$ cm. Die beiden Resonatoren $R = 16,7$ cm und $R = 16,3$ cm gaben auch jetzt für die halbe Wellenlänge denselben Wert oder 18,0 cm, welcher etwas größer als die halbe Wellenlänge ihrer freien Eigenschwingungen ($\lambda/2 = 17,4$ cm) aber bedeutend kleiner als die der primären Wellen ($\lambda/2 = 24$ cm) war.

Weil die Kurven II—V in Fig. 5 unter gleichen Umständen (Abstand $R'R = 3,5$ cm, $OR' = 46$ cm) aufgenommen worden sind, sind sie auch miteinander direkt vergleichbar. Man sieht, daß die von R' ausgehenden Sekundärschwingungen am stärksten ausgebildet waren, wenn der Sekundärerreger in maximaler Resonanz mit dem Primärerreger stand. Bei Vergrößerung der Eigenperiode R' nahm die Intensität der Sekundärschwingungen langsamer ab, als wenn die Eigenperiode von R' verkleinert wurde, welches damit im Einklang steht, daß ein längerer Sekundärleiter im allgemeinen eine größere Energie menge auffängt als ein kürzerer. Wenn man die maximalen Ordinaten mit den Ordinaten derjenigen Kurvenpunkte vergleicht, deren Abszissen in demselben Verhältnis zu den Abszissen der Maximalpunkte stehen, so findet man, daß unter den Resonanzkurven in Fig. 5 die Kurve II die am schärfsten ausgebildet ist, d. h. die Sekundärschwingungen waren am wenigsten gedämpft, wenn Primär- und Sekundärerreger nahezu isochron waren.

Es ergibt sich aus den obigen Versuchen, daß man die Periode der in einem stabförmigen Sekundärleiter erregten Schwingungen dadurch bestimmen kann, daß man einen geeichten Meßresonator auf maximale Resonanz mit den von dem erwähnten Leiter ausgehenden Sekundärschwingungen abstimmt. Wegen der ziemlich symmetrischen Form der auf diese Weise erhaltenen Resonanzkurven (siehe Fig. 5¹⁾) kann man, wie aus den obigen Versuchen hervorgeht, wenigstens in erster Annäherung von der von Bjerknes²⁾ theoretisch angegebener Korrektion absehen.

1) Weil die Eigenperiode eines stabförmigen Leiters zu der geometrischen Länge desselben nahezu proportional ist, würde die Form der Resonanzkurven sich kaum merkbar ändern, wenn man die Eigenwellenlängen der Resonatoren als Abszissen auftragen würde.

2) N. Bjerknes, Wied. Ann. 55. p. 137. 1895.

8. Bei den folgenden Versuchen benutzte ich als Meßresonator den vorher als Sekundärerreger angewendeten Resonator, dessen Länge durch verschiebbare Zusatröhren verändert werden konnte und den wir jetzt mit R_{II} bezeichnen wollen. Als dieser Resonator einen rechten Winkel mit 0 bildete und eine Länge von 22,5 cm ($\lambda/2 = 24,3$ cm) hatte, fand ich durch wiederholtes Abschneiden eines 1,2 mm dicken Kupferdrahtes R_I , der vor R_{II} in geneigter Stellung aufgestellt war, daß dieser Leiter bei maximaler Resonanz mit R_{II} eine Länge von 23,6 cm hatte. Der Leiter R_I behielt dann als Sekundärerreger in unveränderter Lage ($OR_I = 70$ cm) eine Länge von 23,6 cm, während Resonanzkurven durch Variieren der Länge von R_{II} bei verschiedenen Abständen zwischen R_I und R_{II} aufgenommen wurden. Ich erhielt so die in Fig. 6 gezeichneten Kurven I—IV, welche den Abständen $R_I R_{II} = 1,1, 3,5, 6,7$ und $13,5$ cm bzw. entsprechen. Diese Kurven geben alle übereinstimmend für die halbe Wellenlänge der Sekundärschwingungen einen Wert von 24,3 cm, der der Resonatorlänge $R_{II} = 22,5$ cm entspricht. Die Größe des Abstandes $R_I R_{II}$ hatte also, wenigstens wenn er größer als etwa 1 cm war, keinen merkbaren Einfluß auf die Periode der Sekundärschwingungen. Die Kurven II' und IV' sind die auf die maximale Ordinate der Kurve I reduzierten Resonanzkurven II und IV. Man findet, daß die Dämpfung der Sekundärschwingungen mit abnehmendem Abstand zwischen R_I und R_{II} etwas zunahm, daß aber dieser Einfluß des Abstandes bei Abständen $R_I R_{II}$, die größer als etwa 3 cm waren, fast unmerklich war (schon die

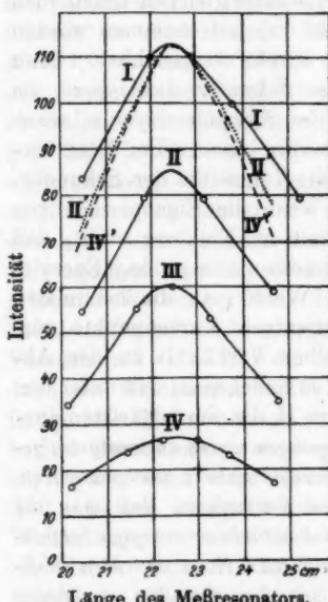


Fig. 6.

stens wenn er größer als etwa 1 cm war, keinen merkbaren Einfluß auf die Periode der Sekundärschwingungen. Die Kurven II' und IV' sind die auf die maximale Ordinate der Kurve I reduzierten Resonanzkurven II und IV. Man findet, daß die Dämpfung der Sekundärschwingungen mit abnehmendem Abstand zwischen R_I und R_{II} etwas zunahm, daß aber dieser Einfluß des Abstandes bei Abständen $R_I R_{II}$, die größer als etwa 3 cm waren, fast unmerklich war (schon die

Kurve II' fällt mit der Kurve IV' ziemlich nahe zusammen). Der erhaltene Wert der halben Wellenlänge 24,3 cm ist um 0,6 cm größer als der nach einer von Abraham¹⁾ gegebenen Formel berechnete Wert 23,7 cm.²⁾ Die Ursache zu dieser Abweichung soll später (p. 1015) diskutiert werden.

9. Anstatt mit Thermoelementen versehener Resonatoren wurden nachher einfache Kupferdrähte von verschiedener Länge als Sekundärerreger benutzt. Die dabei erhaltenen Resonanzkurven³⁾ hatten einen ähnlichen Verlauf wie die entsprechenden in Fig. 5. Aus dem Vergleich mit den zuletzt erwähnten Kurven ging hervor, daß der vom Thermoelemente herrührende „konsumptive“ Teil der Dämpfung gegen den von der sekundären Ausstrahlung herrührenden „konservativen“ Teil vernachlässigt werden konnte. Durch ähnliche Versuche habe ich früher, wie schon auf p. 1001 erwähnt wurde, nachgewiesen, daß die Sekundärschwingungen eines Funkenresonators stärker gedämpft sind als die von einem entsprechenden Resonator ohne Funkenstrecke.

C. Einfluß des Materials und der Dicke des Sekundärerregers.

10. Die Kurven II und III in Fig. 7 sind die Resonanzkurven, welche mit einem 24 cm langen und 0,7 mm dicken Draht aus Kupfer bzw. Eisen als Sekundärerreger (R_1) in geigter Stellung erhalten wurden (Abstand $R_1 R_{11} = 4,7$ cm).

1) M. Abraham, Wied. Ann. 66. p. 435. 1898.

2) Es ist auffallend, daß die nach der Methode mit stehenden Wellen gemessene halbe Wellenlänge der von einem 25 cm langen Kupferdrahte ausgehenden Sekundärschwingungen nicht größer als die Länge des Leiters war (vgl. p. 1008). Es wird aber dies nach dem früher Gesagten erklärlich, wenn man berücksichtigt, daß bei diesem Versuche die primären Wellen eine etwas kleinere Periode als die freien Eigenschwingungen des 25 cm langen Sekundärleiters hatten, und daß die Eigenperiode des Meßresonators dabei wohl auch nicht ganz ohne Einfluß war. Der 24,5 cm lange Sekundärerreger gab schon einen Wert für $\lambda/2$, der etwas größer als seine geometrische Länge war (Kurve II in Fig. 3 p. 1007).

3) Zwei solche Resonanzkurven sind die Kurven III und IV in Fig. 9, p. 1018.

Der Kupferdraht gab also eine stärkere Wirkung als der Eisendraht, und gleichzeitig waren auch die Schwingungen jenes Drahtes weniger gedämpft wie die des Eisendrahtes. Die Kurve I, welche mit einem 1,2 mm dicken und 24 cm langen Kupferdraht als Sekundärerreger erhalten wurde, zeigt, daß bei Leitern aus demselben Material die Intensität der Sekundärschwingungen mit zunehmender Dicke etwas zunahm.

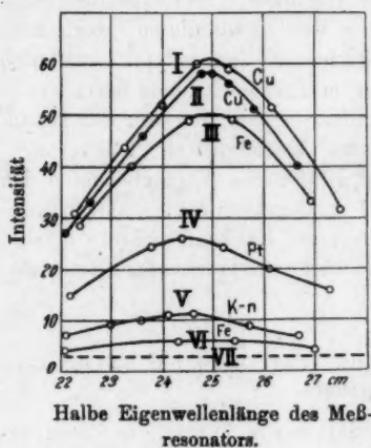


Fig. 7.

Dies wurde auch dadurch bestätigt, daß ein 5 mm dicker Kupferdraht bei maximaler Resonanz mit O und R_{II} eine um 7 Proz. stärkere Wirkung erzeugte als ein gleichlanger, aber nur 1,6 mm dicker Kupferdraht.

Die Kurven IV, V und VI wurden mit 24 cm langen und 0,02 mm dicken Sekundärerregern aus bzw. Platina, Konstantan und Eisen erhalten (die als Sekundärerreger dienenden dünnen Drähte waren in der Nähe ihrer Enden mittels Scheibchen aus Siegellack

an einem dünnen Glasstäbe befestigt, welcher allein keine Wirkung in R_{II} erzeugte). Die Gerade VII gibt die in Abwesenheit des Sekundärerregers gemessene direkte Einwirkung der primären Wellen an. Daß der 0,002 mm dicke Eisendraht, dessen galvanischer Widerstand von derselben Größenordnung wie der des Platindrahtes und nur $\frac{1}{6}$ von dem des Konstantandrahtes war, eine fast verschwindend kleine Wirkung gab, zeigt deutlich den Einfluß der Magnetisierbarkeit des Eisens. Dieser Einfluß nimmt jedoch mit wachsender Dicke des Drahtes ab, denn während der 0,7 mm dicke Kupferdraht als Sekundärerreger eine um ca. 16 Proz. stärkere Wirkung bei maximaler Resonanz erzeugte als der gleich dicke Eisendraht, war dieser Unterschied nur 9 bzw. 2 Proz., wenn die Drähte 1,6 bzw. 5 mm dick waren.

Die Eigenperiode eines 0,02 mm dicken Platindrahtes scheint nach Fig. 7 etwas kleiner als die eines gleich langen aber 0,7 mm dicken (oder noch dickeren) Kupfer- oder Eisendrahtes zu sein, was auf einen Einfluß der Endkapazitäten eines dickeren Drahtes deutet. Die bei einem 1,2 mm dicken stabsförmigen Sekundärleiter früher (p. 1013) beobachtete Abweichung der Eigenperiode von dem berechneten Werte würde demnach, wenigstens zum Teil, auf einen derartigen Einfluß zurückzuführen sein. Daß die Abszisse des Maximums der Kurve IV immer noch um einige Millimeter größer als die Länge des Sekundärleiters (24,0 mm) ist, dürfte wenigstens teilweise davon herrühren, daß der Draht an zwei Stellen von Siegellack (dessen Dielektrizitätskonstante größer als der von Luft ist) umgeben war. Ein ähnlicher Einfluß des Siegellacks machte sich natürlich auch bei den dickeren Leitern geltend.¹⁾ Die Eigenperiode des extrem dünnen Eisendrahtes (Kurve VI) scheint wieder etwas größer als die des Platindrahtes von denselben Dimensionen zu sein (eine mittlere Stellung zwischen ihnen nimmt der Konstantdraht ein), was von der starken Dämpfung der Schwingungen jenes Drahtes herrühren kann.²⁾ Die Kurve I erscheint auch im Verhältnis zu der Kurve II ein wenig nach den größeren Wellen hin verschoben; die Verschiebung ist jedoch so gering, daß es dahingestellt werden mag, ob die Eigenperiode des 1,2 mm dicken Leiters in Wirklichkeit merkbar größer war als die des gleich langen 0,7 mm dicken Leiters.

Obwohl der galvanische Widerstand des 1,2 mm dicken Kupferdrahtes bedeutend geringer war als der des gleich langen 0,7 mm dicken Drahtes aus demselben Material, hatte dies kaum einen merkbaren Einfluß auf die Schärfe der Reso-

1) Bei den Aufnahmen der in Fig. 7 gezeichneten Kurven waren auch die dickeren Sekundärleiter an zwei Stellen (in der Nähe ihrer Enden) an einem dünnen, zu ihnen parallelen Glasstäbe befestigt. Als der 0,7 mm dicke Kupferdraht (wie bei den früher beschriebenen Versuchen) nur in einem Punkte (an seiner Mitte) an einem zu ihm senkrechten Glasstab befestigt wurde, verschob sich das Maximum der Resonanzkurve höchstens um 1 oder 2 mm nach der Seite der kürzeren Wellen hin.

2) Die Versuchsfehler können hier auch mitgewirkt haben.

nanz (vgl. die Kurven I und II in Fig. 7), welches darin seine Erklärung hat, daß der konservative (von der Strahlung bedingte) Teil der Dämpfung eines linearen Erregers um so größer ist, je größer sein Durchmesser im Verhältnis zu seiner Länge ist.¹⁾ Wenn aber der Widerstand sehr groß wird, so gewinnt schließlich der konsumptive (von der Jouleschen Wärme bedingte) Teil der Dämpfung einen überwiegenden Einfluß. Aus einem Vergleich der Kurve IV (Fig. 7) mit der Kurve II (diese Kurven müssen dabei auf dieselbe maximale Ordinate reduziert werden) ergibt sich nämlich, daß die Schwingungen des 0,02 mm dicken Platindrahtes stärker gedämpft waren als die des gleich lang 0,7 mm dicken Kupferdrahtes. Dieser Einfluß des Widerstandes auf die Schärfe der Resonanz ist jedoch ziemlich gering im Verhältnis zu dem vom Widerstande bewirkten starken Herabsinken der Intensität, was auch mit theoretischen Überlegungen im Einklang steht.²⁾

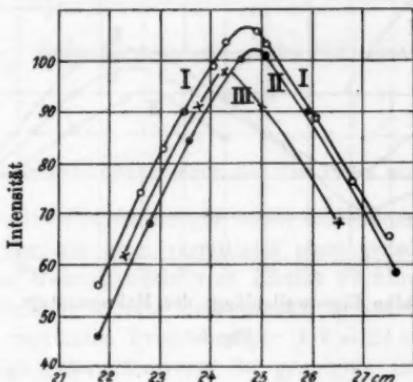
D. Mehrere Sekundärerreger nebeneinander.

11. Zwei benachbarte und zueinander parallele 23,6 cm lange und 1,2 mm dicke Kupferdrähte wurden vor den gegen O gekreuzten Meßresonator R so geführt, daß sie einen Winkel von 45° mit O und R bildeten und die durch sie gelegte Ebene zu den primären Strahlen senkrecht war (der Abstand zwischen dieser Ebene und R betrug 3,5 cm). Durch sukzessive Veränderung der Eigenperiode von R erhielt ich die in Fig. 8 aufgetragenen Resonanzkurven I und II, welche einem gegenseitigen Abstand der zueinander parallelen Drähten von bzw. 7 und 1 mm entsprechen. Die Kurve III stellt die mit einem einzigen 23,6 cm langen drahtförmigen Sekundärerreger erhaltenen Resonanzkurve dar. *Die aneinander sehr eng gekoppelten gleich langen Leiter gaben also Resonanzkurven mit eindeutig bestimmten Maxima, die eine Verschiebung der Eigenwellenlänge des Systems nach der Seite der längeren Wellen erkennen lassen, deren Größe mit abnehmendem Abstande zwischen*

1) Vgl. M. Abraham, l. c.

2) Vgl. J. Zenneck, Elektrom. Schwingungen u. drahtlose Telegraphie p. 621. 1905.

den beiden Seiten zunahm. Ein Auftreten zweier Perioden des schwingenden Systems, bei dem keine Asymmetrie vorhanden war und dessen Bestandteile auf die gleiche Weise von außen erregt wurden, war auch nicht, wie Schaefer und Laugwitz (l. c.) theoretisch nachgewiesen haben, zu erwarten. Mit abnehmendem Abstande zwischen den Leitern nahm auch, wie aus Fig. 8 hervorgeht, die Intensität der Sekundärschwingungen etwas ab, obwohl sie noch ein wenig größer blieb als



Halbe Eigenwellenlänge des Meßresonators.

Fig. 8.

die Intensität der von einem einfachen Leiter erzeugten Schwingungen. Drei gleich lange Kupferdrähte, deren gegenseitiger Abstand = 1 mm war, gaben zusammen eine ebenso starke Wirkung wie zwei von diesen Drähten.

12. Ich machte dann einige Versuche mit zwei zueinander parallelen aber verschieden langen Sekundärerregern, die wieder durch primäre Wellen von der halben Wellenlänge 24 cm erregt wurden. Als die beiden aus 1,2 mm dickem Kupferdraht bestehenden Leiter bzw. 21,5 und 29,0 cm lang waren und einen Abstand = 7 mm voneinander hatten, erhielt ich die Resonanzkurve I in Fig. 9. Die Kurve II in derselben Figur bezieht sich auf den Fall, daß der Abstand zwischen diesen

Leitern = 2 mm war. Allein für sich gaben diese Leiter die Resonanzkurven III und IV. Es geht hervor, daß die beiden aneinander gekoppelten verschiedenen langen Leiter mit je einer Periode schwingte, und zwar scheint die des längeren Leiters durch die Koppelung ein wenig vergrößert und die des kürzeren etwas vermindert worden zu sein. Je enger die Koppelung war, um so mehr hatte sich die Intensität der von dem kürzeren Leiter

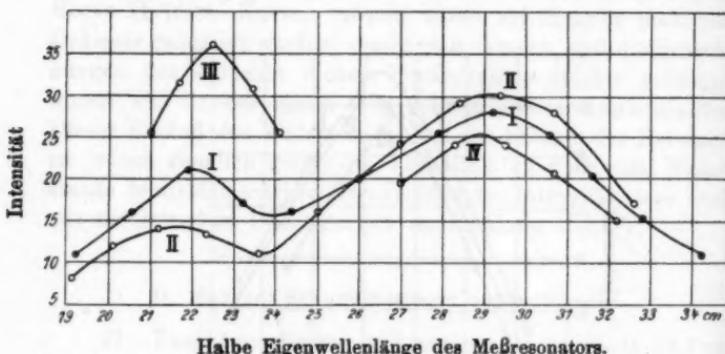
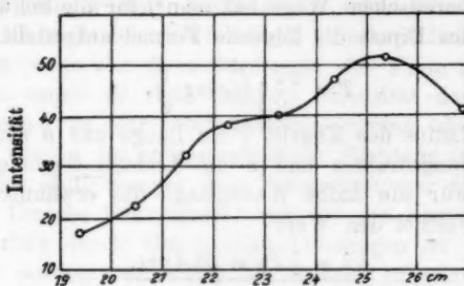


Fig. 9.

ausgehenden Schwingungen vermindert, während die Strahlungsintensität des längeren Leiters gleichzeitig zugenommen hatte, d. h. die Energie der Schwingungen des kürzeren Leiters war mehr oder weniger auf den längeren übertragen worden. Die Koppelung scheint auch die Dämpfung der Schwingungen des kürzeren Leiters vergrößert zu haben.

Als die aneinander gekoppelten Sekundärleiter bzw. 21,5 und 24,5 cm lang waren und ihr Abstand 7 mm betrug, hatte die Resonanzkurve die in Fig. 10 dargestellte Form. Die Eigenschwingungen des kürzeren Leiters machten sich also jetzt noch weniger als im vorigen Falle geltend. Wenn die beiden um 2,5 mm voneinander entfernten Leiter eine Länge von bzw. 26,5 und 29,0 cm hatten, d. h. wenn die Eigenperiode bei jedem von ihnen größer als die des primären Erregers war, so kam nur die Periode des längeren Leiters in der Resonanzkurve zum Vorschein.



Halbe Eigenwellenlänge des Meßresonators.

Fig. 10.

E. Der Sekundärerreger hat die Form eines Dipols.

13. Als Sekundärerreger wurde schließlich noch ein Leiter benutzt, der aus zwei vermittelst eines geradlinigen Drahtes vereinigten Messingkugeln vom Radius 10,8 mm bestand. Als der horizontal orientierte Meßresonator in maximaler Resonanz mit dem vertikalen Primärerreger ($\lambda/2 = 24$ cm) war, und der dipolförmige Sekundärerreger in geneigter Stellung vor dem Meßresonator stand, wurde durch Veränderung der Länge des Verbindungsdrahtes (die eine Hälfte des Drahtes bestand bei diesen vorbereitenden Versuchen aus einer verschiebbaren Röhre aus dünnem Kupferblech) festgestellt, daß dieser Leiter bei einer Drahlänge von ca. 10 cm in maximaler Resonanz mit den primären Wellen stand. Die beiden Kugeln wurden dann vermittelst eines einzigen 1,2 mm dicken und 10,0 cm langen Kupferdrahtes miteinander fest verbunden, wonach durch Variieren der Länge des Meßresonators die Resonanzkurve in Fig. 11 aufgenommen wurde (der Abstand zwischen Sekundärerreger und Meßresonator betrug 3,5 cm). Durch Vergleich mit der entsprechenden von einem 24 cm langen geradlinigen Sekundärleiter früher erhaltenen Resonanzkurve III in Fig. 6 (p. 1012) findet man, daß die Schwingungen des Dipols schwächer gedämpft waren als die des linearen Leiters. Für die halbe Wellenlänge des Dipols ergibt sich aus Fig. 11 ein Wert von 23,6 cm.

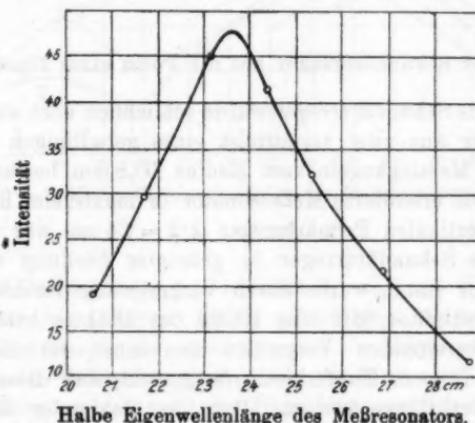
Auf theoretischem Wege hat man¹⁾ für die Schwingungsdauer T eines Dipols die folgende Formel aufgestellt:

$$T = \frac{2\pi}{c} \sqrt{lr \log \frac{l}{\varrho}},$$

wo r den Radius der Kugeln, l die Länge und ϱ den Radius des Verbindungsrahtes und c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnen. Für die halbe Wellenlänge des erwähnten Dipols gibt diese Formel den Wert

$$\frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2}Tc = 23,4 \text{ cm}.$$

Wenn man in Betracht zieht, daß die betreffende Formel nur eine Näherungsformel ist, so muß die Übereinstimmung des



Halbe Eigenwellenlänge des Meßresonators.

Fig. 11.

berechneten Wertes mit dem beobachteten als sogar unerwartet gut bezeichnet werden. Man könnte allerdings auch dem Meßresonator die Form eines Dipols geben und die entsprechende Eigenschwingungsdauer durch direkte Wellenlängenmessungen bestimmen; man müßte aber dann ein aus dünnen Drähten bestehendes Thermoelement nebst Fassung in seine Mitte einschalten oder den Dipol auf irgend eine andere Weise mit anderen Leitern in Verbindung bringen, wodurch die

1) P. Drude, Physik des Äthers p. 397. 1894.

Schwingungsdauer eine Veränderung erleiden würde, deren Betrag sich nicht leicht theoretisch berechnen ließe.

Auch wenn der Sekundärerreger die Form eines Dipols hatte, so zeigte es sich, daß die Intensität der Sekundärschwingungen in der Fortpflanzungsrichtung der primären Strahlen und in der entgegengesetzten Richtung (gegen O hin) in gleichen Entfernungen vom Sekundärerreger dieselbe war.

14. Um die Genauigkeit, mit der die Kurvenpunkte in dieser Arbeit durch Galvanometerablesungen im allgemeinen bestimmt worden sind, durch ein Beispiel zu erläutern, führe ich hier die einzelnen Beobachtungen an, durch welche die Resonanzkurve in Fig 11 erhalten wurde. Es bezeichnen in der folgenden Tabelle R die Länge des Meßresonators, $\lambda_R/2$

Resonanzkurve des Dipols.

R	$\frac{\lambda_R}{2}$	a	b	$100 \times \frac{a}{b}$	Mittel
27,7 cm	28,8 cm	6	48	13	13
"	"	7	58	13	
"	"	7	54	13	
25,8 cm	26,9 cm	12	52	23	23
"	"	12	52	23	
"	"	12	50	24	
24,3 cm	25,4 cm	18	52	35	33
"	"	16	49	33	
"	"	17	50	34	
23,3 cm	24,4 cm	25	57	44	42
"	"	21	50	42	
"	"	23	54	43	
22,1 cm	23,2 cm	22	49	45	45
"	"	21	48	44	
"	"	21	47	45	
20,6 cm	21,7 cm	14	50	28	30
"	"	15	50	30	
"	"	14	48	29	
19,5 cm	20,6 cm	9	49	18	18
"	"	8,5	48	18	
"	"	8,5	47	18	

die halbe Eigenwellenlänge desselben, *a* den Ausschlag des mit dem Meßresonator verbundenen Galvanometers und *b* den gleichzeitigen Ausschlag des mit dem Standardindikators verbundenen Galvanometers. Als Ordinaten der Resonanzkurven sind die Mittelwerte der Ausdrücke $100 \times a/b$ aufgetragen worden.

Berichtigung.

Zuletzt möchte ich diese Gelegenheit benutzen, um zwei in meiner letzten in dieser Zeitschrift veröffentlichten Arbeit (Ann. d. Phys. 38. p. 523—558. 1912) vorkommende Druckfehler zu berichtigen:

p. 533, Zeile 21 von unten lies 0,80 statt 8,80.

p. 538, " 18 " " +1,1 " +0,1.

Als in derselben Arbeit von den gerad- und den ungeradzähligen Oberschwingungen des stabförmigen Erregers die Rede ist, wird auch die Grundschwingung mitgerechnet, welches natürlich uneigentlich ist. Statt „ungeradzählig“ (als Attribut des Wortes Oberschwingung) sollte es deshalb lieber „geradzählig“ heißen.

Helsingfors, Physik. Laboratorium d. Universität.

(Eingegangen 20. Februar 1913.)

9. Über die Beugung elektromagnetischer Wellen
an parallelen,
unendlich langen Kreiszylindern¹⁾;
von Franz Záviška.

Die Beugung elektromagnetischer Wellen an einem unendlich langen Zylinder von kreisförmigem Querschnitt gehört zu den wenigen Problemen, deren strenge Lösung sich aus den Maxwell'schen Gleichungen heraus ohne jede vereinfachende Annahme über die Konstanten des Zylindermaterials durchführen läßt. Die einzige Beschränkung, die man machen muß, betrifft die Größe des Zylinderradius, der klein gegen die Wellenlänge sein soll, was ja bei den Hertz'schen Wellen ohnedies erfüllt ist. Das Problem wurde zuerst von Seitz²⁾ und Ignatowsky³⁾ gelöst, später hat Schaefer⁴⁾ den Fall des dielektrischen Zylinders eingehend diskutiert und sehr interessante Resonanzphänomene gefunden; theoretische Resultate sind von Grossmann⁵⁾ experimentell bestätigt worden. Schaefer und Reiche⁶⁾ haben auch die Beugung elektromagnetischer Wellen an einem Drahtgitter untersucht, aber unter der Annahme, daß der Abstand der Stäbe so groß gegen die Wellenlänge des einfallenden Lichtes ist, daß man die gegenseitige Beeinflussung derselben vernachlässigen kann, und die Wirkung des ganzen Gitters sich einfach als Summe der Einzelwirkungen der Stäbe ergibt.

1) Teilweise in den „Rozpravy“ der böhm. Kaiser-Franz Josef Akademie der Wissenschaften Prag, Nr. 41. 1912 abgedruckt.

2) W. Seitz, Ann. d. Phys. 16. p. 746. 1905; 19. p. 554. 1906.

3) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. 18. p. 495. 1905.

4) C. Schaefer, Physik. Zeitschr. 10. p. 261. 1909.

5) C. Schaefer u. F. Grossmann, Ann. d. Phys. 31. p. 455. 1910.

6) C. Schaefer u. F. Reiche, Ann. d. Phys. 32. p. 577. 1910; 35. p. 817. 1911.

Im folgenden will ich eine exakte Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an mehreren parallelen Zylindern von kreisförmigem Querschnitt entwickeln, über deren Abstand wir keine Voraussetzung machen, so daß auch die Wirkung der Zylinder aufeinander zur Geltung kommen kann. Freilich werden wir uns hauptsächlich nur mit der Beugung an zwei und drei Zylindern beschäftigen, da, wenn die Zahl der Zylinder wächst, die Rechnung ziemlich unübersichtlich wird. Die einfallende Welle sei eine ebene und geradlinig polarisierte; es genügt zwei Hauptfälle zu untersuchen, nämlich erstens, wenn die elektrische Kraft der einfallenden Welle parallel zu den Zylinderachsen verläuft, zweitens, wenn dieselbe senkrecht zu den letzteren gerichtet ist. Durch Superposition beider so erhaltenen Lösungen ergibt sich sofort die Lösung für den allgemeinen Fall. Die Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Welle sei senkrecht zur Ebene der Zylinderachsen. Um die Rechnung zu vereinfachen, wollen wir noch voraussetzen, daß alle Zylinder in jeder Hinsicht identisch sind und gleichen Abstand haben.

Zum Schluß werden wir auch die Beugung an zwei hintereinander stehenden Zylindern untersuchen; die Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Welle sei hier parallel zur Ebene der Zylinderachsen. Die Lösung dieses Falles wird uns ermöglichen, einige Abweichungen von den theoretischen Resultaten, die Grossmann bei seinen Messungen der Beugung an einem Zylinder beobachtet hatte, zu erklären.

Wir gehen jetzt an die Betrachtung der einzelnen Fälle.

1. Die elektrische Kraft parallel zu den Zylinderachsen.

Wir wählen die Ebene der Zylinderachsen zur zz -Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems, die z -Achse sei zu den Zylinderachsen parallel. Anstatt der Koordinaten x und y führen wir ebene Polarkoordinaten r und φ ein, und transformieren die Maxwellschen Gleichungen auf die Zylinderkoordinaten r, φ, z . Da offenbar alle Feldgrößen von z unabhängig sind und die elektrische Kraft nicht nur in der einfallenden Welle, sondern auch in den reflektierten und in den in die Zylinder eindringenden Wellen parallel zur z -Achse

verläuft, so nehmen bei Benutzung der üblichen Bezeichnungsweise die Maxwellschen Gleichungen folgende Gestalt an:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sigma} \left(\epsilon \frac{\partial \mathfrak{E}_s}{\partial t} + 4\pi \sigma \mathfrak{E}_s \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathfrak{H}_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial \varphi}, \\ \frac{\mu}{\sigma} \frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial t} = - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{E}_s}{\partial \varphi}, \\ \frac{\mu}{\sigma} \frac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_s}{\partial r}. \end{array} \right.$$

Durch Elimination von \mathfrak{H}_r und \mathfrak{H}_φ aus diesen Gleichungen erhalten wir die bekannte Differentialgleichung für \mathfrak{E}_s :

$$(1') \quad \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial \varphi^2},$$

in welcher der Einfachheit halber \mathfrak{E} für \mathfrak{E}_s gesetzt wird, und deren Integral unter der Berücksichtigung des Umstandes, daß wir mit rein periodischen Vorgängen zu tun haben, lautet

$$(2) \quad \mathfrak{E} = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (F_n(kr) \cos n\varphi + G_n(kr) \sin n\varphi),$$

wo F_n und G_n allgemeine Besselsche Funktionen n^{ter} Ordnung und vom Argument kr sind, und k durch die Gleichung

$$(3) \quad k^2 = \frac{\mu \epsilon}{c^2} \omega^2 - \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \omega i$$

definiert erscheint.

Nehmen wir Vakuum als Außenraum und bezeichnen die auf denselben bezüglichen Größen durch den Index 1, die auf den Innenraum bezüglichen mit 2, so folgt

$$(3') \quad k_1 = \frac{2\pi}{\lambda},$$

für k_2 aber bekommt man, wenn die Zylinder aus einem Dielektrikum bestehen,

$$(3'') \quad k_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\mu_2 \epsilon_2};$$

sind dagegen die Zylinder gute Leiter, so daß man ϵ gegen σ vernachlässigen kann, so folgt

$$(3''') \quad k_2 = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma_2 \mu_2}{\epsilon_2 \lambda}} (1 - i).$$

Die resultierende elektrische Kraft im Außenraum besteht aus der elektrischen Kraft der einfallenden Welle und der von

den einzelnen Zylindern ausgehenden Störungswellen. Die Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Welle fällt in die y -Achse; setzen wir voraus, daß die Welle sich in der Richtung der abnehmenden y bewegt, so folgt

$$\mathfrak{E}_{1e} = e^{i(\omega t + k_1 y)},$$

wobei die Amplitude gleich Eins gesetzt wurde. Für die Störungswellen setzen wir den Ausdruck (2); aus der Bedingung, daß derselbe für sehr große r eine in der Richtung der steigenden r fortschreitende Welle mit abnehmender Amplitude bezeichnen soll, folgt, wie Ignatowsky zuerst gezeigt hat, daß die Besselschen Funktionen F_n und G_n sich auf eine einzige reduzieren, die wir mit Q_n bezeichnen wollen und die mit den wohlbekannten Besselschen Funktionen erster und zweiter Art, J_n und K_n , mittels der Gleichung

$$Q_n = K_n - i \frac{\pi}{2} J_n$$

zusammenhängt. Sind nun r_h und φ_h Polarkoordinaten des Aufpunktes M , bezogen auf den Mittelpunkt C_h des h^{ten} Zylinders

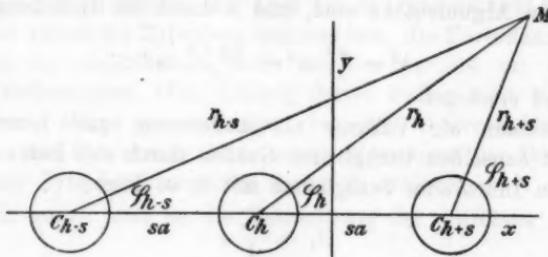


Fig. 1.

(Fig. 1), so bekommt man für die von demselben ausgehende Störungswelle folgenden Ausdruck:

$$e^{i\omega t} \sum_n^{0, \infty} (A_{hn} \cos n\varphi_h + B_{hn} \sin n\varphi_h) Q_n(k_1 r_h),$$

und für die resultierende elektrische Kraft im Außenraum erhält man:

$$(4) \quad \mathfrak{E}_1 = e^{i(\omega t + k_1 y)} + e^{i\omega t} \sum_h^{1, N} \sum_n^{0, \infty} (A_{hn} \cos n\varphi_h + B_{hn} \sin n\varphi_h) Q_n(k_1 r_h),$$

wo N die Zahl der Zylinder bedeutet. Die Zahl der Koeffizienten A_{hn} und B_{hn} läßt sich mittels Symmetrieverhältnisse noch herabsetzen.

Für innere Punkte kommen nur diejenigen Besselschen Funktionen in Betracht, die für $r_h = 0$ endlich bleiben; dieser Bedingung genügt nur die Besselsche Funktion erster Art J_n , so daß die in den h^{ten} Zylinder eindringende Welle durch die Gleichung

$$(5) \quad \mathfrak{E}_{2h} = e^{i\omega t} \sum_n^{\infty} (C_{hn} \cos n \varphi_h + D_{hn} \sin n \varphi_h) J_n(k_2 r_h)$$

gegeben ist. Auch hier ergeben sich bei Berücksichtigung der Symmetrieverhältnisse Relationen zwischen den Koeffizienten C_{hn} und D_{hn} , durch welche die Zahl derselben herabgesetzt wird.

Die übrig bleibenden Koeffizienten A_{hn} , B_{hn} , C_{hn} und D_{hn} sind aus den Grenzbedingungen zu ermitteln. Nach denselben müssen die tangentiale Komponenten der elektrischen und magnetischen Kraft an der Oberfläche eines jeden Zylinders stetig bleiben. Betrachten wir also die Oberfläche des h^{ten} Zylinders, so muß für $r_h = \varrho$ (ϱ bedeutet den Zylindradius) und jedes φ_h gelten:

$$(6) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_{2h} \\ (\mathfrak{H}_\varphi)_1 = (\mathfrak{H}_\varphi)_{2h}; \end{cases}$$

statt der letzten Gleichung hat man auch, wie aus der dritten Gleichung (1) folgt,

$$(6') \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial r_h} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\partial \mathfrak{E}_{2h}}{\partial r_h}.$$

Da die Grenzbedingungen (6) und (6') für ein konstantes r_h und beliebiges φ_h erfüllt sein sollen, so wird es offenbar am zweckmäßigsten sein, den Ausdruck (4) für die resultierende elektrische Kraft im Außenraum in eine nach dem Kosinus und Sinus des vielfachen φ_h fortschreitende Fouriersche Reihe, deren Koeffizienten Funktionen von r_h wären, zu entwickeln, wie es mit dem Ausdrucke (5) für \mathfrak{E}_{2h} schon der Fall ist. Dies läßt sich verhältnismäßig einfach durchführen. Zuerst folgt aus einer bekannten Beziehung

$$e^{ik_1 y} = e^{i k_1 r_h \sin \varphi_h} = J_0(k_1 r_h) + 2 \sum_n^{\infty} J_{2n}(k_1 r_h) \cos 2n \varphi_h \\ + 2i \sum_n^{\infty} J_{2n-1}(k_1 r_h) \sin (2n-1) \varphi_h.$$

Weiter müssen wir die in Gleichung (4) auftretenden Produkte

$$Q_n(k_1 r_p) \cos n \varphi_p \quad \text{und} \quad Q_n(k_1 r_p) \sin n \varphi_p,$$

wo p eine beliebige ganze und positive, von h verschiedene Zahl, die nicht größer als N ist, bedeutet, in der Form einer Fourierschen Reihe darstellen. Ist zuerst $p > h$, so setzen wir $p = h + s$; aus dem $\Delta MC_h C_{h+s}$ folgt dann

$$r_{h+s}^2 = r_h^2 + s^2 a^2 - 2 s a r_h \cos \varphi_h,$$

wo a den gegenseitigen Abstand der Zylinderachsen bezeichnet. Weiter gilt:

$$r_{h+s} \cos \varphi_{h+s} = r_h \cos \varphi_h - s a,$$

$$r_{h+s} \sin \varphi_{h+s} = r_h \sin \varphi_h.$$

Addiert man die letzte mit i multiplizierte Gleichung zur vorstehenden, so folgt:

$$r_{h+s} e^{i \varphi_{h+s}} = r_h e^{i \varphi_h} - s a,$$

ähnlich folgt:

$$r_{h+s} e^{-i \varphi_{h+s}} = r_h e^{-i \varphi_h} - s a,$$

und aus beiden letzten Gleichungen ergibt sich, wenn $r_h < s a$ ist:

$$e^{i \varphi_{h+s}} = - \left(\frac{s a - r_h e^{i \varphi_h}}{s a - r_h e^{-i \varphi_h}} \right)^{1/2};$$

das Zeichen der rechten Seite wird dadurch bestimmt, daß für $\varphi_h = 0$ die Wurzel gleich -1 sein muß; es ist dann nämlich $\varphi_{h+s} = \pi$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} Q_n(k_1 r_{h+s}) e^{-i n \varphi_{h+s}} \\ = (-1)^n \left(\frac{s a - r_h e^{i \varphi_h}}{s a - r_h e^{-i \varphi_h}} \right)^{-\frac{n}{2}} Q_n(k_1 \sqrt{r_h^2 + s^2 a^2 - 2 s a r_h \cos \varphi_h}). \end{aligned}$$

Nun läßt sich die rechte Seite in eine Neumannsche Reihe entwickeln. Nach einer Formel, die Graf¹⁾ zuerst angegeben hat, hat man

$$(7) \quad \begin{cases} \left(\frac{s a - r_h e^{i \varphi_h}}{s a - r_h e^{-i \varphi_h}} \right)^{-\frac{n}{2}} F_n(k_1 \sqrt{r_h^2 + s^2 a^2 - 2 s a r_h \cos \varphi_h}) \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_{m+n}(k_1 s a) J_m(k_1 r_h) e^{i m \varphi_h}, \end{cases}$$

1) J. H. Graf, Mathem. Annalen 43. p. 136. 1898.

wo F_n eine beliebige Besselsche Funktion sein kann, von der wir hier voraussetzen wollen, daß sie für ein reelles Argument auch reell ist. Die rechts stehende Reihe ist sicher konvergent, sobald $r_h < s a$ ist, was in der Nähe der Oberfläche des k^{th} Zylinders immer gilt. Diejenigen Besselschen Funktionen, deren Ordnung durch eine negative Zahl gegeben ist, sind durch die Gleichung

$$F_{-n} = (-1)^n F_n$$

definiert. Durch Trennung der reellen Bestandteile von den imaginären erhält man leicht die Entwickelungen für

$$F_n(k_1 r_{h+s}) \cos n \varphi_{h+s} \quad \text{und} \quad F_n(k_1 r_{h+s}) \sin n \varphi_{h+s}.$$

Setzt man nun zuerst $F_n = K_n$, dann $F_n = J_n$, so folgen nach einer einfachen Rechnung auch die Entwickelungen für

$$Q_n(k_1 r_{h+s}) \cos n \varphi_{h+s} \quad \text{und} \quad Q_n(k_1 r_{h+s}) \sin n \varphi_{h+s}.$$

Wir schreiben

$$(8) \quad \begin{cases} Q_n(k_1 r_{h+s}) \cos n \varphi_{h+s} = (-1)^n \sum_m^{0, \infty} a_{n m}^{(s)} J_m(k_1 r_h) \cos m \varphi_h, \\ Q_n(k_1 r_{h+s}) \sin n \varphi_{h+s} = (-1)^{n-1} \sum_m^{1, \infty} b_{n m}^{(s)} J_m(k_1 r_h) \sin m \varphi_h, \end{cases}$$

wo

$$(9) \quad \begin{cases} a_{n 0}^{(s)} = Q_n(s k_1 a), \\ a_{n m}^{(s)} = Q_{n+m}(s k_1 a) + (-1)^m Q_{n-m}(s k_1 a), \\ b_{n m}^{(s)} = Q_{n+m}(s k_1 a) + (-1)^{m-1} Q_{n-m}(s k_1 a). \end{cases}$$

Durch Derivation der Gleichungen (8) erhält man weitere Entwickelungen in der Form:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{1}{k_1} \frac{\partial}{\partial r_h} (Q_n(k_1 r_{h+s}) \cos n \varphi_{h+s}) \\ \quad = (-1)^n \sum_m^{0, \infty} a_{n m}^{(s)} J_m'(k_1 r_h) \cos m \varphi_h, \\ \frac{1}{k_1} \frac{\partial}{\partial r_h} (Q_n(k_1 r_{h+s}) \sin n \varphi_{h+s}) \\ \quad = (-1)^{n-1} \sum_m^{1, \infty} b_{n m}^{(s)} J_m'(k_1 r_h) \sin m \varphi_h, \end{cases}$$

wo

$$J_m'(x) = \frac{d J_m(x)}{dx}$$

gesetzt wurde.

Ist nun $p < h$, also $p = h - s$, so hat man zuerst:

$$e^{i\varphi_{h-s}} = \left(\frac{s a + r_h e^{-i\varphi_h}}{s a + r_h e^{i\varphi_h}} \right)^{-1/2},$$

solange $r_h < s a$ ist. Setzt man nun

$$\varphi_h = \pi - \vartheta,$$

so findet man in derselben Weise wie früher folgende Entwickelungen:

$$(10) \quad \begin{cases} Q_n(k_1 r_{h-s}) \cos n\varphi_{h-s} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_{nm}^{(s)} J_m(k_1 r_h) \cos m\varphi_h, \\ Q_n(k_1 r_{h-s}) \cos n\varphi_{h-s} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} b_{nm}^{(s)} J_m(k_1 r_h) \sin m\varphi_h. \end{cases}$$

Führt man die Entwickelungen (8) und (10) in die Gleichung (4) ein, so bekommt man leicht aus den Grenzbedingungen (6) und (6') lineare Beziehungen zwischen den Koeffizienten A_{hn} usw., die zur Bestimmung derselben dienen können.

Um uns aber nicht in Allgemeinheiten zu verlieren, wollen wir zur Betrachtung spezieller Fälle übergehen. Setzen wir

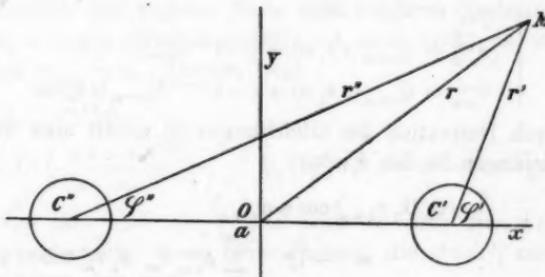


Fig. 2.

voraus, daß die Beugung an *zwei* parallelen Zylindern vor sich geht. Es seien r' und φ' die Polarkoordinaten des Aufpunktes M in bezug auf den Mittelpunkt C' des rechten Zylinders (Fig. 2), r'' , φ'' in bezug auf den Mittelpunkt C'' des linken Zylinders, so erhält man für die resultierende elektrische

Kraft im Außenraum \mathfrak{E}_1 aus der Gleichung (4) folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_1 = & e^{i(\omega t + k_1 y)} + e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (A_n' \cos n\varphi' + B_n' \sin n\varphi') Q_n(k_1 r') \\ & + e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (A_n'' \cos n\varphi'' + B_n'' \sin n\varphi'') Q_n(k_1 r'').\end{aligned}$$

Da nun offenbar die $y z$ -Ebene eine Symmetrieebene für die elektrische Kraft ist, so muß gelten:

$$A_n' = (-1)^n A_n'' = A_n, \quad B_n' = (-1)^{n-1} B_n'' = B_n,$$

es ist also:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned}\mathfrak{E}_1 = & e^{i(\omega t + k_1 y)} \\ & + e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (Q_n(k_1 r') \cos n\varphi' + (-1)^n Q_n(k_1 r'') \cos n\varphi'') \\ & + e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} B_n (Q_n(k_1 r') \sin n\varphi' + (-1)^{n-1} Q_n(k_1 r'') \sin n\varphi'').\end{aligned}\right.$$

Für die in den rechten Zylinder eindringende Welle setzen wir nach Gleichung (5)

$$(12) \quad \mathfrak{E}_2' = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (C_n \cos n\varphi' + D_n \sin n\varphi') J_n(k_2 r'),$$

und daraus folgt für die in den linken Zylinder eindringende Welle der Ausdruck:

$$(12') \quad \mathfrak{E}_2'' = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (C_n \cos n\varphi'' - D_n \sin n\varphi'') J_n(k_2 r''),$$

wobei die Symmetrieverhältnisse schon berücksichtigt sind.

Die Grenzbedingungen (6) und (6') sollen nun für die Oberfläche beider Zylinder erfüllt werden. Man sieht aber, daß es wegen der Symmetrie der Ausdrücke (11), (12) und (12') genügt, dieselben nur für die Oberfläche des einen von ihnen, z. B. des rechten, aufzustellen. Aus den Gleichungen (10) folgt dann:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned}Q_n(k_1 r'') \cos n\varphi'' &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_{nm} J_m(k_1 r') \cos m\varphi', \\ Q_n(k_1 r'') \sin n\varphi'' &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m-1} b_{nm} J_m(k_1 r') \sin m\varphi',\end{aligned}\right.$$

wo

$$(14) \quad \begin{cases} a_{n0} = Q_n(k_1 a), \\ a_{nm} = Q_{n+m}(k_1 a) + (-1)^m Q_{n-m}(k_1 a), \\ b_{nm} = Q_{n+m}(k_1 a) + (-1)^{m-1} Q_{n-m}(k_1 a) \end{cases}$$

gesetzt wurde.

Die linearen Gleichungen für A_n , B_n usw., die sich aus den Grenzbedingungen (6) und (6') ergeben, zerfallen in zwei voneinander unabhängige Systeme. Setzt man der Kürze halber

$$(15) \quad \begin{cases} k_1 \varrho = p_1, \quad k_2 \varrho = p_2, \\ \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{k_2}{k_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{p_2}{p_1} = \eta, \end{cases}$$

so lautet das erste System

$$(16) \quad \begin{cases} A_0 Q_0(p_1) + (A_0 a_{00} - A_1 a_{10} + A_2 a_{20} - \dots) J_0(p_1) \\ \quad + J_0(p_1) = C_0 J_0(p_2), \\ A_1 Q_1(p_1) - (A_0 a_{01} - A_1 a_{11} + A_2 a_{21} - \dots) J_1(p_1) \\ \quad = C_1 J_1(p_2), \\ A_2 Q_2(p_1) + (A_0 a_{02} - A_1 a_{12} + A_2 a_{22} - \dots) J_2(p_1) \\ \quad + 2 J_2(p_1) = C_2 J_2(p_2), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{cases}$$

$$(16') \quad \begin{cases} A_0 Q_0'(p_1) + (A_0 a_{00} - A_1 a_{10} + A_2 a_{20} - \dots) J_0'(p_1) \\ \quad + J_0'(p_1) = C_0 \eta J_0'(p_2), \\ A_1 Q_1'(p_1) - (A_1 a_{01} - A_1 a_{11} + A_2 a_{21} - \dots) J_1'(p_1) \\ \quad = C_1 \eta J_1'(p_2), \\ A_2 Q_2'(p_1) + (A_0 a_{02} - A_1 a_{12} + A_2 a_{21} - \dots) J_2'(p_1) \\ \quad + 2 J_2'(p_1) = C_2 \eta J_2'(p_2), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{cases}$$

und ähnlich erhält man für das zweite System:

$$(17) \quad \begin{cases} B_1 Q_1(p_1) + (B_1 b_{11} - B_2 b_{21} + \dots) J_1(p_1) \\ \quad + 2 i J_1(p_1) = D_1 J_1(p_2), \\ B_2 Q_2(p_1) - (B_1 b_{12} - B_2 b_{22} + \dots) J_2(p_1) = D_2 J_2(p_2), \\ B_3 Q_3(p_1) + (B_1 b_{13} - B_2 b_{23} + \dots) J_3(p_1) \\ \quad + 2 i J_3(p_1) = D_3 J_3(p_2), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{cases}$$

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_1 Q_1'(p_1) + (B_1 b_{11} - B_2 b_{21} + \dots) J_1'(p_1) \\ \quad + 2i J_1'(p_1) = D_1 \eta J_1'(p_2), \\ B_2 Q_2'(p_1) - (B_1 b_{12} - B_2 b_{22} + \dots) J_2'(p_1) = D_2 \eta J_2'(p_2), \\ B_3 Q_3'(p_1) + (B_1 b_{13} - B_2 b_{23} + \dots) J_3'(p_1) \\ \quad + 2i J_3'(p_1) = D_3 \eta J_3'(p_2), \\ \dots \end{array} \right.$$

In erster Reihe handelt es sich um die Bestimmung der Koeffizienten A_n und B_n , welche im Ausdrucke (11) für die elektrische Kraft im Außenraum auftreten. Eliminiert man also C_n und D_n aus den letzten Gleichungen und setzt man der Kürze halber

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_n'(p_1) J_n(p_2) - \eta J_n(p_1) J_n'(p_2) = G_n, \\ Q_n'(p_1) J_n(p_2) - \eta Q_n(p_1) J_n'(p_2) = H_n, \end{array} \right.$$

so folgt

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0 H_0 + (A_0 a_{00} - A_1 a_{10} + A_2 a_{20} - \dots) G_0 + G_0 = 0, \\ A_1 H_1 - (A_0 a_{01} - A_1 a_{11} + A_2 a_{21} - \dots) G_1 = 0, \\ A_2 H_2 + (A_0 a_{02} - A_1 a_{12} + A_2 a_{22} - \dots) G_2 + 2G_2 = 0, \\ \dots \end{array} \right.$$

$$(19') \quad \left\{ \begin{array}{l} B_1 H_1 + (B_1 b_{11} - B_2 b_{21} + \dots) G_1 + 2i G_1 = 0, \\ B_2 H_2 - (B_1 b_{12} - B_2 b_{22} + \dots) G_2 = 0. \\ \dots \end{array} \right.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen gestaltet sich sehr einfach, wenn das Verhältnis ϱ/λ , und also auch p_1 , hinreichend klein ist, weil dann die Koeffizienten A_n und B_n mit steigendem Index n rasch abnehmen. Beschränkt man sich nämlich in den bekannten Reihen für die Zylinderfunktionen $K_n(p_1)$ und $J_n(p_1)$ stets auf das erste Glied, was für kleine p_1 als erste Annäherung zu betrachten ist, so folgt aus den Gleichungen (18) für $n > 1$

$$G_n = \frac{1}{n!} \frac{p_1^{n-1}}{2^n} \left(n J_n(p_2) - \frac{p_2}{\mu_2} J_n'(p_2) \right),$$

$$H_n = -(n-1)! \frac{2^{n-1}}{p_1^{n+1}} \left(n J_n(p_2) + \frac{p_2}{\mu_2} J_n'(p_2) \right).$$

Man sieht also, daß die Koeffizienten A_n und B_n im allgemeinen von der Ordnung p_1^{2n} sind, ja sogar, wenn man

auch p_2 als klein betrachten darf, und μ_2 gleich eins ist, was bei dielektrischen Zylindern und bei äußerst feinen, unmagnetischen Metalldrähten erfüllt ist, erhält man in der hier benutzten Annäherung $G_n = 0$, so daß die Werte von A_n und B_n noch kleiner ausfallen.

Daraus folgt nun eine einfache Methode zur Auflösung der Gleichungen (19) und (19'). Vernachlässigt man in der ersten Gleichung (19) alle Glieder mit A_1, A_2, \dots , so erhält man durch die Auflösung derselben den ersten Näherungswert für A_0 . Setzt man diesen Wert in die zweite Gleichung (19), in der man nur die Glieder mit A_1 behält, so folgt daraus der erste Näherungswert für A_1 , in gleicher Weise bestimmt man den ersten Näherungswert für A_2 usw. Wenn man dann die so erhaltenen Werte für A_1, A_2, \dots in die erste Gleichung (19) einführt, so bekommt man den zweiten Näherungswert für A_0 , ähnlich folgt aus der zweiten Gleichung (19) der zweite Näherungswert für A_1 usw. Das Verfahren führt rasch zum Ziele; manchmal genügt es schon, nur die ersten Näherungswerte zu kennen.

Das Feld im Außenraum ist durch den Ausdruck (11) gegeben, von dem nur der reelle Teil zu berücksichtigen ist. Setzt man also

$$\begin{aligned} A_n &= \alpha_n + i\gamma_n, \\ B_n &= \beta_n + i\delta_n, \end{aligned}$$

so bringt man \mathfrak{E}_1 leicht auf die Form

$$(20) \quad \mathfrak{E}_1 = P \cos \omega t - Q \sin \omega t,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(20') \quad \left\{ \begin{array}{l} P = \cos k_1 y + \sum K_n(k_1 r') (\alpha_n \cos n \varphi' + \beta_n \sin n \varphi') \\ \quad + \frac{\pi}{2} \sum J_n(k_1 r') (\gamma_n \cos n \varphi' + \delta_n \sin n \varphi') \\ \quad + \sum (-1)^n K_n(k_1 r'') (\alpha_n \cos n \varphi'' - \beta_n \sin n \varphi'') \\ \quad + \frac{\pi}{2} \sum (-1)^n J_n(k_1 r'') (\gamma_n \cos n \varphi'' - \delta_n \sin n \varphi''), \\ Q = \sin k_1 y + \sum K_n(k_1 r') (\gamma_n \cos n \varphi' + \delta_n \sin n \varphi') \\ \quad - \frac{\pi}{2} \sum J_n(k_1 r') (\alpha_n \cos n \varphi' + \beta_n \sin n \varphi') \\ \quad + \sum (-1)^n K_n(k_1 r'') (\gamma_n \cos n \varphi'' - \delta_n \sin n \varphi'') \\ \quad - \frac{\pi}{2} \sum (-1)^n J_n(k_1 r'') (\alpha_n \cos n \varphi'' - \beta_n \sin n \varphi''). \end{array} \right.$$

Bei experimentellen Messungen kommt es hauptsächlich auf den zeitlichen Mittelwert von \bar{E}_1^2 , d. h. auf

$$\bar{E}_1^2 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \bar{E}_1^2 dt$$

an; τ bezeichnet die Schwingungsperiode. Nach der Gleichung (20) ist einfach

$$(21) \quad \bar{E}_1^2 = \frac{1}{2} (P^2 + Q^2).$$

Der Ausdruck für \bar{E}_1^2 , zu dem man nach Einführung von P und Q aus den Gleichungen (20') gelangt, ist für die Diskussion nicht geeignet. Man kann ihm eine einfachere Gestalt geben, indem man voraussetzt, daß die Entfernung r' und r'' des Aufpunktes von beiden Zylinderachsen hinreichend groß gegen die Wellenlänge sind, so daß man für die Besselschen Funktionen J_n und K_n die bekannten asymptotischen Darstellungen benutzen darf. Man findet dann:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = \cos k_1 y - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{r'}} (S' \sin \psi' - T' \cos \psi') \\ \quad - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{r''}} (S'' \sin \psi'' - T'' \cos \psi''), \\ Q = \sin k_1 y - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{r'}} (S' \cos \psi' + T' \sin \psi') \\ \quad - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{r''}} (S'' \cos \psi'' + T'' \sin \psi''), \end{array} \right.$$

wo gesetzt wurde:

$$(22') \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi' = k_1 r' - \frac{\pi}{4}, \quad \psi'' = k_1 r'' - \frac{\pi}{4}, \\ S' = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\alpha_{2m} \cos 2m\varphi' + \beta_{2m} \sin 2m\varphi' \\ \quad - \gamma_{2m+1} \cos (2m+1)\varphi' - \delta_{2m+1} \sin (2m+1)\varphi'), \\ T' = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\gamma_{2m} \cos 2m\varphi' + \delta_{2m} \sin 2m\varphi' \\ \quad + \alpha_{2m+1} \cos (2m+1)\varphi' + \beta_{2m+1} \sin (2m+1)\varphi'). \end{array} \right.$$

Die Ausdrücke für S'' und T'' folgen aus denen für S' und T' , wenn man in dieselben $180^\circ - \varphi''$ statt φ' einführt.

Aus der Gleichung (21) ergibt sich

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathfrak{E}}_1^2 = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{4\sqrt{r'r''}} (S'S'' + T'T'') \cos(\psi' - \psi'') \\ \quad - (S'T'' - S''T') \sin(\psi' - \psi'') \\ \quad + \frac{\lambda}{8r'} (S'^2 + T'^2) + \frac{\lambda}{8r''} (S''^2 + T''^2) \\ \quad - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{r'}} (S' \sin(k_1 y + \psi') - T' \cos(k_1 y + \psi')) \\ \quad - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{r''}} (S'' \sin(k_1 y + \psi'') - T'' \cos(k_1 y + \psi'')). \end{array} \right.$$

Diese Gleichung besagt, daß sich die mittlere Feldintensität mit der Lage des Aufpunktes periodisch ändert, oder daß sich Interferenzstreifen bilden. Aus der Form derselben sieht man, daß es am einfachsten ist, den Verlauf der Feldintensität an denjenigen Kurven zu betrachten, an welchen die Differenz $\psi' - \psi''$ oder auch $r' - r''$ konstant bleibt. Es sind Hyperbeln (im Raum hyperbolische Zylinder), die in Gerade, welche durch den Mittelpunkt verlaufen, übergehen, sobald die Entfernung des Aufpunktes von den beiden Zylinderachsen gegen ihren Abstand groß ist. Unter derselben Bedingung bleiben auch die Werte von S' , T' , S'' , T'' nahezu konstant, wenn sich der Aufpunkt auf einer solchen Geraden bewegt, denn die Winkel φ' und φ'' ändern sich langsam, und außerdem nehmen die Koeffizienten α_m , β_m usw. mit steigendem Index m rasch ab. Wächst nun beim Übergange von einem Maximum oder Minimum der Feldintensität zum nächstfolgenden y um Δy , ψ' (oder ψ'') um $\Delta \psi'$, so folgt aus Gleichung (23) mit großer Annäherung

$$(24) \quad k_1 \Delta y + \Delta \psi' = 2\pi.$$

Es sei nun r die Entfernung des Aufpunktes M vom Mittelpunkte O , χ der Winkel, den die Verbindungsgeraden beider dieser Punkte mit der negativen y -Achse einschließen — wir wollen χ den „Beugungswinkel“ nennen —; man hat dann $y = -r \cos \chi$, weiter folgt aus der ersten Gleichung (22)

$$\Delta \psi' = k_1 \Delta r',$$

oder auch, weil r' groß gegen den Abstand beider Zylinder ist,

$$\Delta \psi' = k_1 \Delta r.$$

So bekommt man aus der Gleichung (24) für den Abstand Δr zweier aufeinanderfolgender Maxima oder Minima folgenden Wert:

$$(24') \quad \Delta r = \frac{\lambda}{1 - \cos \chi}.$$

Die Interferenzstreifen liegen also am häufigsten nebeneinander, wenn $\chi = \pi$ ist, d. h. in der Symmetrieebene, vor den Zylindern; es ist dann $\Delta r = \lambda/2$. In der Ebene beider Zylinderachsen ist $\chi = \pi/2$, also $\Delta r = \lambda$, endlich in der Symmetrieebene, aber hinter den Zylindern, ist $\chi = 0$, und Δr ist unendlich groß, hier also kommen keine Interferenzstreifen zustande, wenigstens nicht für Entfernung, die groß gegen a und λ sind.

Ganz denselben Beziehungen begegnet man auch bei der Untersuchung der Beugung elektromagnetischer Wellen an einem einzigen Zylinder; auch da ist der Abstand zweier aufeinanderfolgender Maxima oder Minima bei festem χ durch die Gleichung (24') gegeben. Überhaupt sieht man aus dem allgemein gültigen Ausdrucke (4) für die resultierende elektrische Kraft im Außenraum, daß man wieder zur Gleichung (24') gelangt, sobald die Entfernung des Aufpunktes von den Zylindern gegen die Wellenlänge und gegen den Abstand der beiden äußeren Zylinder groß sind. Speziell folgt auch für zwei Zylinder, daß, wenn der Abstand der Zylinder klein ist, das Feld im Außenraum im großen und ganzen demjenigen eines einzigen Zylinders ähnlich verläuft, weil die Phasendifferenz der beiden von den Zylindern ausgehenden Störungswellen klein ist. Erst mit wachsendem Abstand der Zylinder tritt der Einfluß der Interferenz beider Wellen zutage; so z. B. bilden sich in der Symmetrieebene, hinter den Zylindern, Interferenzstreifen, deren Zahl aber endlich bleibt und mit zunehmendem Abstand der Zylinder auch zunimmt.

Um nun die Wirkung beider Zylinder aufeinander zu verfolgen, wollen wir voraussetzen, daß beide Zylinder dünn sind, daß also p_1 hinreichend klein ist. Die Rechnung wird dadurch bedeutend vereinfacht, denn es fallen dann die Koeffizienten A_n und B_n , wie wir schon früher gezeigt haben, sehr rasch ab, so daß man in erster Annäherung alle gegen A_0 vernachlässigen darf, wenigstens, insofern es sich um die Be-

stimmung der Feldintensität in Punkten, die nicht allzu nahe an der Oberfläche der Zylinder liegen, handelt. Es folgt dann aus der ersten Gleichung (18)

$$A_0 = - \frac{G_0}{H_0 + Q_0(k_1 a) G_0},$$

wo die Werte von G_0 und H_0 durch die Gleichungen (18) gegeben sind, in welche $n = 0$ zu setzen ist.

Für die weitere Diskussion müssen wir noch auseinanderhalten, ob die Beugung an dielektrischen oder an leitenden Zylindern erfolgt. Im ersten Falle ist $p_2 = p_1 \sqrt{\varepsilon}$, es ist also auch klein; weiter ist nach der letzten Gleichung (15) $\eta = \sqrt{\varepsilon}$, wenn man der Einfachheit wegen $\mu_2 = 1$ setzt, woraus folgt

$$H_0 = - \frac{1}{p_1}, \quad G_0 = \frac{p_1}{2} (\varepsilon - 1),$$

und mit derselben Genauigkeit folgt weiter

$$(25) \quad A_0 = \frac{s-1}{2} p_1^2 \left(1 + \frac{s-1}{2} p_1^2 Q_0(k_1 a) \right).$$

Das Glied mit $Q_0(k_1 a)$ entspricht der gegenseitigen Beeinflussung beider Zylinder. Bedenkt man, daß $Q_0(k_1 a)$ für kleine Werte von a von der Ordnung $\log k_1 a$ ist, und daß $k_1 a$ nimmer kleiner sein kann als $2p_1$, so sieht man, daß auch bei kleiner Entfernung beider Zylinder die Wirkung derselben aufeinander gering ist, und daß man das Feld im Außenraum mit großer Annäherung einfach als durch Übereinanderlagerung beider Felder, die die Zylinder für sich allein hervorrufen würden, entstanden denken kann. Aus der letzten Gleichung folgt auch, daß sich die gegenseitige Beeinflussung beider Zylinder bei wachsendem Abstand a periodisch — natürlich mit sinkender Amplitude — ändert.

Ganz anders stehen die Verhältnisse, wenn beide Zylinder gute Leiter sind. Wegen des großen Wertes der Leitfähigkeit, die in elektrostatischen Einheiten ausgedrückt wird, ist k_2 , und also auch η , sehr groß, so daß man, den Fall äußerst feiner Metaldrähte ausgenommen, in den Ausdrücken (18) für G_0 und H_0 die mit η nicht behafteten Glieder ohne Bedenken streichen kann. Man erhält dann:

$$(25'') \quad A_0 = - \frac{J_0(p_1)}{Q_0(p_1) + Q_0(k_1 a)},$$

eine Formel, aus welcher alle den Zylindern zugehörigen Konstanten verschwunden sind, und welche für unendlich gute Leiter streng gültig wäre. Aus dieser Gleichung sieht man auch, daß die gegenseitige Beeinflussung der beiden Zylinder in diesem Falle recht beträchtlich sein kann, denn für kleine Werte von a sind beide im Nenner auftretenden Glieder von derselben Ordnung; erst für große Werte von a verschwindet sie, und das Feld entsteht einfach durch Superposition der Wirkungen einzelner Zylinder.

Es sei noch bemerkt, daß sich die Wirkung der Zylinder aufeinander leicht interpretieren läßt, falls ihr Abstand hinreichend groß ist. Für große Werte von a ist nämlich

$$Q_n(k_1 a) = -i^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2 k_1 a}} e^{i\left(\frac{\pi}{4} - k_1 a\right)} = i^n Q_0(k_1 a),$$

und aus den Gleichungen (14) folgt dann

$$a_{n0} = Q_n(k_1 a),$$

$$a_{nm} = 2 i^{n+m} Q_0(k_1 a) = 2 i^n Q_n(k_1 a),$$

$$b_{nm} = 0.$$

Führt man diese Werte in die Gleichungen (17) und (17') ein, so erhält man für die Koeffizienten B_n ganz dieselben Gleichungen wie im Falle der Beugung an einem einzigen Zylinder. Es ist hier $B_{2m} = 0$. In den Gleichungen (16) und (16') darf man zuerst in diejenigen Glieder, in denen die Koeffizienten a_{mn} auftreten, statt A_n annähernd richtige Werte einführen, die man erhält, wenn man $a_{mn} = 0$ setzt, und welche auch dem Falle eines einzigen Zylinders entsprechen. Wir bezeichnen sie mit A_n ; es ist $A_{2m+1} = 0$. Setzt man nun der Kürze halber

$$(26) \quad A_0 Q_0 + A_2 Q_2 + A_4 Q_4 + \dots = M,$$

so lauten die Gleichungen (16) und (16')

$$A_0 Q_0(p_1) + M J_0(p_1) + J_0(p_1) = C_0 J_0(p_2),$$

$$A_1 Q_1(p_1) - 2i M J_1(p_1) = C_1 J_1(p_2),$$

$$A_2 Q_2(p_1) + 2i^2 M J_2(p_1) + 2 J_2(p_1) = C_2 J_2(p_2),$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$A_0 Q_0'(p_1) + M J_0'(p_1) + J_0'(p_1) = C_0 \eta J_0'(p_2),$$

$$A_1 Q_1'(p_1) - 2i M J_1'(p_1) = C_1 \eta J_1'(p_2),$$

$$A_2 Q_2'(p_1) + 2i^2 M J_2'(p_1) + 2 J_2'(p_1) = C_2 \eta J_2'(p_2),$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

Dieselben Gleichungen würde man auch erhalten, wenn man voraussetzte, daß die Beugung an einem einzigen Zylinder entsteht, daß aber neben der einfallenden Welle, die sich in der Richtung der negativen y -Achse bewegt, noch eine andere einfallende Welle auftritt, die durch den Ausdruck

$$Me^{-ik_1 r' \cos \varphi'} = Me^{-ik_1 \left(x - \frac{a}{2} \right)}$$

gegeben wäre. Diese Welle pflanzt sich in der Richtung der zunehmenden x fort. Aus der Gleichung (26) sieht man, daß ihre Amplitude proportional mit $a^{-1/2}$ ist, und daß ihr periodischer Teil gleich

$$e^{i \left[\frac{\pi}{4} - k_1 \left(\frac{a}{2} + x \right) \right]}$$

ist. Es ist also die vom linken Zylinder ausgehende Störungswelle.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung der Beugung an *drei* parallelen, äquidistanten Zylindern über. Es seien r, φ die Polarkoordinaten des Aufpunktes, in bezug auf den Mittelpunkt des mittleren Zylinders, r', φ' bzw. r'', φ'' die Polarkoordinaten des Aufpunktes, auf die Mittelpunkte beider äußeren Zylinder bezogen. Man erhält dann für die resultierende elektrische Kraft im Außenraum unter Berücksichtigung der Symmetrieverhältnisse folgenden Ausdruck:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_1 = e^{i(\omega t + k_1 y)} + e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{0, \infty} (A_{2n} Q_{2n}(k_1 r) \cos 2n\varphi \\ \quad + B_{2n+1} Q_{2n+1}(k_1 r) \sin (2n+1)\varphi) \\ \quad + e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{0, \infty} A_n' (Q_n(k_1 r') \cos n\varphi' + (-1)^n Q_n(k_1 r'') \cos n\varphi'') \\ \quad + e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{1, \infty} B_n' (Q_n(k_1 r') \sin n\varphi' + (-1)^{n-1} Q_n(k_1 r'') \sin n\varphi''); \end{array} \right.$$

für die elektrische Kraft im Innern des mittleren Zylinders folgt dann:

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_2 = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{0, \infty} (C_{2n} J_{2n}(k_2 r) \cos 2n\varphi \\ \quad + D_{2n+1} J_{2n+1}(k_2 r) \sin (2n+1)\varphi), \end{array} \right.$$

endlich für die elektrische Kraft im Innern der beiden äußeren Zylinder bekommt man:

$$(27'') \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_2' = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{0, \infty} (C_n' \cos n\varphi' + D_n' \sin n\varphi') J_n(k_2 r'), \\ \mathfrak{E}_2'' = e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{0, \infty} (-1)^n (C_n' \cos n\varphi'' - D_n' \sin n\varphi'') J_n(k_2 r''). \end{array} \right.$$

Die Grenzbedingungen sind an der Oberfläche des mittleren Zylinders und eines der beiden äußeren, z. B. des rechten, zu erfüllen. Man muß also zuerst den Ausdruck (27) in eine Fouriersche Reihe, die nach dem Kosinus und Sinus des vielfachen φ bzw. φ' fortschreitet, umwandeln. Dies läßt sich leicht nach der oben angedeuteten Weise durchführen; man erhält

$$\begin{aligned} Q_n(k_1 r') \cos n\varphi' + (-1)^n Q_n(k_1 r'') \cos n\varphi'' \\ = 2(-1)^n \sum_{m=0}^{0, \infty} a_{n, 2m} J_{2m}(k_1 r) \cos 2m\varphi, \\ Q_n(k_1 r') \sin n\varphi' + (-1)^{n-1} Q_n(k_1 r'') \sin n\varphi'' \\ = 2(-1)^{n-1} \sum_{m=0}^{0, \infty} b_{n, 2m+1} J_{2m+1}(k_1 r) \sin (2m+1)\varphi, \\ Q_n(k_1 r) \cos n\varphi = \sum_{m=0}^{0, \infty} (-1)^m a_{n, m} J_m(k_1 r) \cos m\varphi', \\ Q_n(k_1 r) \sin n\varphi = \sum_{m=0}^{1, \infty} (-1)^{m-1} b_{n, m} J_m(k_1 r) \sin m\varphi', \\ Q_n(k_1 r'') \cos n\varphi'' = \sum_{m=0}^{0, \infty} (-1)^m \bar{a}_{n, m} J_m(k_1 r'') \cos m\varphi', \\ Q_n(k_1 r'') \sin n\varphi'' = \sum_{m=0}^{1, \infty} (-1)^{m-1} \bar{b}_{n, m} J_m(k_1 r'') \sin m\varphi', \end{aligned}$$

wo die Größen $a_{n, m}$, $b_{n, m}$ durch die Gleichungen (14) definiert sind; weiter gilt:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{n, 0} = Q_n(2k_1 a), \\ a_{n, m} = Q_{n+m}(2k_1 a) + (-1)^m Q_{n-m}(2k_1 a), \\ b_{n, m} = Q_{n+m}(2k_1 a) + (-1)^{m-1} Q_{n-m}(2k_1 a). \end{array} \right.$$

Stellt man also die Grenzbedingungen (6) und (6') für die Oberfläche eines jeden Zylinders auf, so bekommt man, wie

im vorigen Falle, zwei voneinander unabhängige Systeme linearer Beziehungen zwischen den Koeffizienten A_{2n} , B_{2n+1} usw. Nach Elimination von C_{2n} , D_{2n+1} , C'_n und D'_n lauten die Gleichungen:

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0 H_0 + 2(A'_0 a_{00} - A'_1 a_{10} + \dots) G_0 + G_0 = 0, \\ A_2 H_2 + 2(A'_0 a_{02} - A'_1 a_{12} + \dots) G_2 + 2 G_2 = 0, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ B_1 H_1 + 2(B'_1 b_{11} - B'_2 b_{21} + \dots) G_1 + 2i G_1 = 0, \\ B_3 H_3 + 2(B'_1 b_{13} - B'_2 b_{23} + \dots) G_3 + 2i G_3 = 0 \end{array} \right.$$

und

wo G_n und H_n durch die Gleichungen (18) bestimmt sind.

Über die Auflösung der Gleichungen (29) und (29') gilt nun dasselbe, was schon über die Gleichungen (16) und (16') gesagt wurde; auch die Diskussion des Feldes dreier Zylinder in den Punkten, deren Entfernung von den Zylindern hinreichend groß ist, führt zu ähnlichen Schlüssen wie früher. Wir wollen also gleich zu dem einfachen Falle übergehen, wo die Zylinder sehr dünn sind; man darf dann von allen in den Gleichungen (29) und (29') auftretenden Koeffizienten nur A_0 und A'_0 behalten. Man erhält:

$$A_0 H_0 + 2A_0' a_{00} G_0 + G_0 = 0.$$

woraus folgt

$$A_0 = - \frac{M}{\frac{H_0}{G_0} M + 2 a_{00} N},$$

$$A'_0 = - \frac{N}{\frac{H_0}{G_0} + 2 a_{00} N},$$

wo gesetzt wurde:

$$M = \frac{H_0}{G_0} + a_{00} - 2 a_{00}, \quad N = \frac{H_0}{G_0} - a_{00}.$$

Das Feld im Außenraum ist nach Gleichung (27) durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_1 = e^{i(\omega t + k_1 y)} + e^{i\omega t} (A_0 Q_0(k_1 r) + A'_0 Q_0(k_1 r') \\ \quad + A'_0 Q_0(k_1 r'')) = R e^{i\omega t}. \end{array} \right.$$

Setzt man nun

$$R = P + i Q,$$

wo P und Q reell sind, so folgt für den zeitlichen Mittelwert der Feldintensität:

$$\bar{\mathfrak{E}}_1^2 = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2).$$

Mit Hilfe dieser Formeln ist nun die mittlere Feldintensität dreier Kupferdrähte von 1 mm Durchmesser, für verschiedene Abstände a , berechnet. Die Wellenlänge $\lambda = 31,4$ cm, als Aufpunkte sind zwei Punkte der Symmetrieebene, der eine 10 cm, der andere 40 cm hinter dem mittleren Zylinder liegend (also $y = -10$ cm bzw. $y = -40$ cm), gewählt. Die Leitfähigkeit $\sigma = 5,25 \cdot 10^{17}$ elstat. Einh., woraus folgt

$$p_2 = 234(1 - i), \quad \frac{1}{\eta} = 2,13 \cdot 10^{-5}(1 + i).$$

Da p_2 einen sehr großen Wert hat, dessen imaginärer Teil negativ ist, so darf man mit hinreichender Genauigkeit setzen

$$\frac{J'_0(p_2)}{J_0(p_2)} = i - \frac{1}{2p_2} = i - 1,1 \cdot 10^{-3}(1 + i).$$

Die Werte der Feldintensität sind auf die mittlere Intensität des störungsfreien Feldes bezogen (d. h. der Wert von $\bar{\mathfrak{E}}_1^2$ ist mit 2 multipliziert) und in der dritten bzw. fünften Kolonne der beigegebenen Tab. I angegeben. Zum Vergleich sind in der zweiten und vierten Kolonne die Werte der mittleren Feldintensität zweier Kupferdrähte von demselben

Durchmesser und für gleiche Wellenlänge angeführt. Die Aufpunkte liegen jetzt hinter einem der Drähte (es ist also z. B. $\varphi' = -\pi/2$) in denselben Entfernung wie früher.

Tabelle I.

$\rho = 0,1$ cm, $\lambda = 81,4$ cm, $\sigma = 5,25 \cdot 10^{17}$ elstat. Einh.

a	$y = -10$ cm		$y = -40$ cm	
	Zwei Drähte	Drei Drähte	Zwei Drähte	Drei Drähte
1 cm	0,589	0,507	0,780	0,731
3	0,526	0,374	0,737	0,640
5	0,497	0,294	0,708	0,561
7,5	0,505	0,331	0,683	0,507
10	0,579	0,555	0,678	0,542
15	0,845	0,998	0,756	0,697
20	0,912	1,240	0,862	0,874
25	0,862	1,040	0,937	1,048
30	0,721	0,746	0,970	1,089
40	0,553	0,418	0,962	1,092
50	0,829	0,956	0,985	0,721
∞	0,708	0,708	0,848	0,848

Man sieht, daß die Schattenwirkung eines einzelnen Drahtes ($a = \infty$) durch die Anwesenheit anderer Drähte nicht immer verstärkt erscheint; manchmal kann dieselbe sogar aufgehoben werden, so daß dann die Feldintensität hinter dem Drahte größer ist als diejenige des ungestörten Feldes. Freilich tritt dies nur in den Punkten auf, die ziemlich nahe an den Drähten liegen. Ist dagegen die Entfernung des Aufpunktes hinreichend groß gegen die Wellenlänge und gegen den Abstand der Drähte, so wird das Feld immer geschwächt; wie es sich leicht auf Grund der Gleichung (30) zeigen läßt, wenn man in derselben die Besselschen Funktionen durch die asymptotischen Werte darstellt und bedenkt, daß sowohl der reelle als auch der imaginäre Teil von A_0 und A_0' immer negativ ist.

Die Schattenwirkung der Drähte erreicht ihr Maximum für einen gewissen Wert von a , der von der Lage des Aufpunktes abhängt; rücken die Drähte näher aneinander, so wird

das Feld verstärkt. Mit wachsendem a ändert sich das Feld periodisch; für sehr große Werte von a ist die Periode gleich λ .

2. Die elektrische Kraft ist senkrecht zu den Zylinderachsen.

Dieser Fall ist theoretisch und experimentell weniger interessant als der vorige und wir wollen ihn nur kurz betrachten. Von den elektrischen Kraftkomponenten treten hier nur \mathfrak{E}_r und \mathfrak{E}_φ auf, von den magnetischen kommt nur die den Zylinderachsen parallele Komponente \mathfrak{H}_z vor. Da außerdem alles von z unabhängig ist, so lauten die Maxwell'schen Gleichungen einfach:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathfrak{E}_\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial \varphi}, \\ \frac{1}{c} \left(\epsilon \frac{\partial \mathfrak{E}_r}{\partial t} + 4\pi \sigma \mathfrak{E}_r \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial \varphi}, \\ \frac{1}{c} \left(\epsilon \frac{\partial \mathfrak{E}_\varphi}{\partial t} + 4\pi \sigma \mathfrak{E}_\varphi \right) = - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial r}. \end{array} \right.$$

Aus denselben erhält man in bekannter Weise folgende Differentialgleichungen für \mathfrak{H}_z — wie wir jetzt kurz statt \mathfrak{H}_z schreiben wollen:

$$(31') \quad \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial t^2} + \frac{4\pi \sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial \varphi^2},$$

eine Gleichung, die mit der Gleichung (1) für \mathfrak{E} vollkommen identisch ist und für deren Integral man wieder den Ausdruck (2) setzen darf. Ebenso ist die resultierende magnetische Kraft im Außenraum und im Innenraum durch die Ausdrücke (4) und (5) gegeben; es ist also

$$\mathfrak{H}_1 = e^{i(\omega t + k_1 y)} + e^{i\omega t} \sum_h^{1, N} \sum_n^{0, \infty} (A_{hn} \cos n \varphi_h + B_{hn} \sin n \varphi_h) Q_n(k_1 r_h),$$

$$\mathfrak{H}_{2h} = e^{i\omega t} \sum_n^{0, \infty} (C_{hn} \cos n \varphi_h + D_{hn} \sin n \varphi_h) J_n(k_2 r_h).$$

Die Grenzbedingungen an der Oberfläche des h ten Zylinders lauten:

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_{2h}, \\ (\mathfrak{E}_\varphi)_1 = (\mathfrak{E}_\varphi)_{2h}; \end{array} \right.$$

statt der letzten Gleichung darf man wieder schreiben

$$(32') \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_1}{\partial r_h} = \frac{r_1}{r_2} \frac{\partial \mathfrak{H}_{2h}}{\partial r_h},$$

wo gesetzt wurde:

$$(33) \quad v = 4\pi\sigma + i\epsilon\omega.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung (3) erhält man auch:

$$v = \frac{ie^2}{\omega\mu} k^2.$$

Man sieht, daß sich die Gleichungen (32) und (32') von den im vorigen Falle geltenden Grenzbedingungen (6) und (6') nur dadurch unterscheiden, daß in denselben ν_1 und ν_2 mit μ_1 und μ_2 vertauscht erscheint. Daraus folgt weiter, daß die dort entwickelten Gleichungen auch hier bestehen, nur muß der Wert von η , der durch die Gleichung (15) bestimmt ist, geändert werden; es ist nämlich jetzt

$$\eta = \frac{k_2}{k_1} \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{k_1}{k_2} \frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

Handelt es sich um dielektrische Zylinder, so ist

$$\eta = \frac{\mu_2}{\sqrt{\epsilon}};$$

sind die Zylinder gute Leiter, so hat man:

$$\eta = \sqrt{\frac{\sigma\mu_2}{\sigma\lambda}} \frac{1+i}{2},$$

η ist also hier sehr klein.

Wir wollen uns der Einfachheit halber auf den Fall zweier Zylinder beschränken und gleich voraussetzen, daß beide Zylinder sehr dünn sind. Sind nun die Zylinder dielektrisch und darf man $p_2 = p_1\sqrt{\epsilon}$ auch als klein betrachten, so folgt aus den Gleichungen (18), daß G_0 von der Ordnung p_1^3 ist, alle anderen G_n sind von der Ordnung p_1^{2n-1} , endlich alle H_n sind von der Ordnung $1/p_1$. Aus den Gleichungen (19) und (19') sieht man dann, daß man in erster Annäherung alle A_n gleich Null setzen darf; weiter ist

$$B_1 = i p_1^2 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \left(1 + b_{11} \frac{p_1^2}{2} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \right),$$

alle übrigen B_n darf man wieder vernachlässigen. Die Wirkung der Zylinder aufeinander ist also wieder gering.

Sind die Zylinder gute Leiter, so darf man in den Gleichungen (18) die mit η behafteten Glieder streichen; dann folgt, daß das Verhältnis G_n/H_n von der Ordnung p_1^{2n} , G_0/H_0 von der Ordnung p_1^3 ist. Es sind also die Koeffizienten A_n

und B_1 von derselben Ordnung, alle übrigen A_n und B_n darf man vernachlässigen. Man erhält aus den Gleichungen (19) und (19')

$$A_0 = -\frac{p_1^2}{2} \left(1 - a_{00} \frac{p_1^2}{2}\right),$$

$$B_1 = i p_1^2 \left(1 + b_{11} \frac{p_1^2}{2}\right).$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit der Gleichung (25''), die dem Falle entspricht, daß die elektrische Kraft der einfallenden Welle parallel zu den Zylinderachsen verläuft, so sieht man gleich, daß, wenn die elektrische Kraft senkrecht zu den Zylinderachsen gerichtet ist, die Wirkung der Zylinder aufeinander viel geringer und auch die durch die Zylinder hervorgerufene Störung des Feldes bedeutend kleiner, ja kaum bemerkbar ist, sobald der Aufpunkt nicht allzu nahe an der Oberfläche der Drähte liegt. Es ist auch ohne weiteres klar, daß dasselbe auch bei der Beugung an drei Zylindern gültig bleibt.

Daraus folgt nun ein interessantes Resultat. Bei seinen bekannten Gitterversuchen fand H. Hertz, daß ein Gitter aus zylindrischen Metallstäben die elektrische Energie der auffallenden Welle in verschiedener Weise beeinflußt, je nachdem die elektrische Kraft zu den Stäben parallel oder senkrecht gerichtet ist. Im ersten Falle wird das Feld nahezu völlig abgeschirmt, im zweiten Falle dagegen läßt das Gitter fast die ganze einfallende Energie durch. Ähnliche Verhältnisse findet man auch, falls die Beugung an einem einzigen Metalldrahte vor sich geht; das „Durchlässigkeitsvermögen“ eines solchen Drahtes ist für die Punkte, die hinter ihm liegen, kleiner, wenn die elektrische Kraft der einfallenden Welle parallel mit dem Drahte verläuft als im anderen Falle — wenigstens solange das Verhältnis ϱ/λ hinreichend klein bleibt. Wir wollen diesen Effekt mit Schaefer den *Hertzeffekt* nennen. Aus den in Tab. I angeführten Zahlen sieht man nun, daß im Falle der Beugung an zwei oder drei parallelen Metalldrähten das dem Hertzeffekt entgegengesetzte Phänomen stattfinden kann; unter Umständen ist hier nämlich die mittlere Feldintensität in den Punkten, die hinter einem der Drähte liegen, bedeutend größer, wenn die elektrische Kraft parallel zu den Drähten verläuft. Dieser Effekt wurde von Schaefer *Duboiseffekt* genannt. Man sieht aber auch, daß das Auftreten

des Duboiseffektes nur auf die Punkte beschränkt ist, welche ziemlich nahe an den Drähten liegen; für weiter entfernte Punkte läßt sich nur der Hertzeffekt erwarten, wie ihn auch Schaefer und Reiche¹⁾ für Gitter, deren Gitterkonstante groß ist, gefunden haben.

3. Zwei Zylinder hintereinander. Die elektrische Kraft ist parallel zu den Zylinderachsen.

Wir wollen jetzt die Beugung an zwei hintereinander stehenden, parallelen Zylindern untersuchen. Die Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Welle ist also jetzt parallel zur Ebene, welche durch die beiden Zylinderachsen bestimmt ist. Beide Zylinder dürfen verschieden sein. Wir werden uns nur auf den Fall beschränken, daß die elektrische Kraft der einfallenden Welle parallel zu den Zylinderachsen verläuft.

Macht man die Ebene beider Zylinderachsen wieder zur xz -Ebene, so fällt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der einfallenden Welle in die x -Achse, und setzt man voraus, daß sich dieselbe in der Richtung der abnehmenden x bewegt, so hat man:

$$\mathfrak{E}_{1e} = e^{i(\omega t + k_1 x)},$$

oder auch (vgl. Fig. 2)

$$\mathfrak{E}_{1e} = e^{i(\omega t + k_1 r' \cos \varphi' + k_1 \frac{a}{2})} = e^{i(\omega t + k_1 r'' \cos \varphi'' - k_1 \frac{a}{2})}.$$

Da die xz -Ebene offenbar eine Symmetrieebene ist, so folgt für die vom vorderen Zylinder ausgehende Störungswelle:

$$\mathfrak{E}_{1r}' = e^{i\omega t} \sum_n^{0, \infty} A_n Q_n(k_1 r') \cos n\varphi',$$

ähnlich bekommt man für die vom hinteren Zylinder ausgehende Störungswelle:

$$\mathfrak{E}_{1r}'' = e^{i\omega t} \sum_n^{0, \infty} B_n Q_n(k_1 r'') \cos n\varphi'',$$

so daß die resultierende elektrische Kraft im Außenraum durch den folgenden Ausdruck gegeben erscheint:

$$(34) \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_1 = e^{i(\omega t + k_1 x)} \\ \quad + e^{i\omega t} \sum_n^{0, \infty} (A_n Q_n(k_1 r') \cos n\varphi' + B_n Q_n(k_1 r'') \cos n\varphi''). \end{array} \right.$$

1) Cl. Schaefer u. F. Reiche, l. c.

Für die elektrische Kraft im Innern des vorderen Zylinders setzen wir:

$$(35) \quad \mathfrak{E}_2' = e^{i\omega t} \sum_n^0 \infty C_n J_n(k_2' r) \cos n\varphi',$$

endlich folgt für die elektrische Kraft im Innern des hinteren Zylinders der Ausdruck:

$$(35') \quad \mathfrak{E}_3'' = e^{i\omega t} \sum_n^0 D_n J_n(k_3'' r'') \cos n\varphi''.$$

Die Grenzbedingungen sind durch die Gleichungen (6) und (6') gegeben; man muß sie aber für die Oberfläche eines jeden Zylinders gesondert aufstellen. Was den vorderen Zylinder betrifft, so ist die Rechnung ganz dieselbe, wie sie schon für den Fall zweier nebeneinander stehender Zylinder durchgeführt wurde, und braucht nicht wiederholt zu werden. Mit Hilfe der Gleichung:

$$e^{i k_1 r' \cos \varphi'} = J_0(k_1 r') + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(k_1 r') \cos n \varphi'$$

und der Gleichungen (13) gelangt man zu folgenden Beziehungen:

wo gesetzt wurde:

$$(36') \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1 \varrho' = p_1, \quad k_2' \varrho' = p_2, \\ \frac{\mu_1}{\mu_2'} \frac{k_2'}{k_1} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{p_2}{p_1} = \eta; \end{array} \right.$$

ρ' bedeutet den Radius des vorderen Zylinders. Die Koeffizienten a_{mn} sind durch die Gleichungen (14) gegeben.

Geht man zum hinteren Zylinder über, so hat man zuerst den Ausdruck (34) für E_1 in eine Fouriersche, nach dem Kosinus und Sinus des vielfachen φ'' fortschreitende Reihe umzuformen. In derselben Weise wie früher erhält man hier:

$$Q_n(k_1 r) \cos n \varphi' = (-1)^n \sum_m^0 \infty a_{nm} J_m(k_1 r'') \cos m \varphi'',$$

so daß die Grenzbedingungen (6) und (6') folgende Gleichungen liefern:

$$\begin{aligned}
 & B_0 Q_0(\pi_1) + (A_0 a_{00} - A_1 a_{10} + A_2 a_{20} - \dots) J_0(\pi_1) \\
 & \quad + J_0(\pi_1) e^{-i k_1 \frac{a}{2}} = D_0 J_0(\pi_2), \\
 & B_1 Q_1(\pi_1) + (A_0 a_{01} - A_1 a_{11} + A_2 a_{21} - \dots) J_1(\pi_1) \\
 & \quad + 2i J_1(\pi_1) e^{-i k_1 \frac{a}{2}} = D_1 J_1(\pi_2), \\
 & B_2 Q_2(\pi_1) + (A_0 a_{02} - A_1 a_{12} + A_2 a_{22} - \dots) J_2(\pi_1) \\
 & \quad + 2i^2 J_2(\pi_1) e^{-i k_1 \frac{a}{2}} = D_2 J_2(\pi_2), \\
 & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\
 & B_0 Q_0'(\pi_1) + (A_0 a_{00} - A_1 a_{10} + A_2 a_{20} - \dots) J_0'(\pi_1) \\
 & \quad + J_0'(\pi_1) e^{-i k_1 \frac{a}{2}} = D_0 \xi J_0'(\pi_2), \\
 & B_1 Q_1'(\pi_1) + (A_0 a_{01} - A_1 a_{11} + A_2 a_{21} - \dots) J_1'(\pi_1) \\
 & \quad + 2i J_1'(\pi_1) e^{-i k_1 \frac{a}{2}} = D_1 \xi J_1'(\pi_2),
 \end{aligned} \tag{37}$$

wo gesetzt wurde:

$$(37') \quad \left\{ \begin{array}{l} k_1 \varrho'' = \pi_1, \quad k_2 \varrho'' = \pi_2, \\ \frac{\mu_1}{\mu_2''} \frac{\pi_2}{\pi_1} = \xi; \end{array} \right.$$

ρ'' bedeutet den Radius des hinteren Zylinders.

Wir wollen nun die Gleichungen (36) und (37) dazu benutzen, um einige Resultate, zu denen Grossmann¹⁾ bei seinen Messungen der Beugung an einem Zylinder gelangte, und die mit der Theorie nicht übereinstimmen, zu erklären. Zur Erzeugung der primären ebenen Wellen diente ihm ein Hertzscher Erreger, der in der Brennlinie eines parabolischen Spiegels aufgestellt war. Die Wellen fielen auf ein zylindrisches, dünnwandiges Glasrohr, das mit Wasser gefüllt war, und die Strahlung wurde mit einem Klemenčičschen Thermoelement gemessen, das auf den Erreger abgestimmt war. Die Messungen wurden in der Weise durchgeführt, daß zuerst die freie Strahlung gemessen wurde. Es wurde dann in den Strahlengang ein Zylinder gebracht, und die Strahlung wieder bestimmt; das Verhältnis beider so erhaltenen Werte wurde dann mit dem theoretischen Werte verglichen.

Die Übereinstimmung mit der Theorie war so genau, wie es sich eben in Anbetracht der Schwierigkeiten, mit welchen die Messungen verbunden waren, erwarten ließ; nur in einem Punkte zeigte sich ein wesentlicher Unterschied. Den theoretischen Resultaten zufolge sollen in den hinter dem Zylinder liegenden Punkten keine Interferenzstreifen entstehen; wenn die Entfernung des Aufpunktes von dem Zylinder wächst, so soll die Feldintensität entweder fortwährend abnehmen, bis sie den ursprünglichen Wert (ohne Zylinder) erreicht, oder sie soll fortwährend zunehmen, oder endlich nimmt sie zuerst ab, erreicht ein Minimum, und dann nähert sie sich steigend allmählich dem der freien Strahlung entsprechenden Werte. Die Messungen ergaben dagegen in einigen Fällen periodische Schwankungen der Intensität, die mit wachsendem Abstand vom Zylinder abnahmen; die Periode war angenähert $\lambda/2$. Aus dem Umstande, daß diese Schwankungen nur dann aufraten, wenn der Radius des Zylinders verhältnismäßig groß und die Entfernung des Aufpunktes vom Zylinder gegen die Wellenlänge klein war, erklärten die Autoren ihr Auftreten dadurch, daß das Meßinstrument selbst das zu messende Feld ändert. Im folgenden wollen wir nun zeigen, daß die Theorie wirklich periodische Schwankungen der Feldintensität in den hinter

1) Cl. Schaefer u. F. Grossmann, l. c.

dem Zylinder liegenden Punkten ergibt, wenn man die Wirkung des Thermoelementes auf den Zylinder berücksichtigt.

Zu dem Zwecke denken wir uns das Thermoelement durch einen unendlich langen, sehr dünnen Metalldraht ersetzt. Die Beugung erfolgt an beiden Zylindern; mißt man also die Feldintensität in einem hinter dem Zylinder liegenden Punkte, so hat man den gerade untersuchten Fall. Da der Radius des hinteren Zylinders äußerst klein ist, so darf man in den Gleichungen (36) und (37) B_1, B_2, \dots gegen B_0 vernachlässigen. Aus den Gleichungen (36) folgt dann:

$$(38) \quad A_n = \alpha_n + \beta_n B_0,$$

wobei gilt:

$$(38') \quad \begin{cases} \alpha_0 = -\frac{G_0}{H_0} e^{i k_1 \frac{a}{2}}, & \alpha_n = -2 i^n \frac{G_n}{H_n} e^{i k_1 \frac{a}{2}}, \\ \beta_n = (-1)^{n-1} \frac{G_n}{H_n} a_{0n}; \end{cases}$$

die Koeffizienten G_n und H_n sind durch die Gleichungen (18) gegeben. Von den Gleichungen (37) bleiben jetzt nur zwei übrig, die nach der Einführung des Ausdrückes (38) für A_n lauten:

$$(39) \quad \begin{cases} B_0 (Q_0(\pi_1) + \beta J_0(\pi_1)) + J_0(\pi_1) \left(\alpha + e^{-i k_1 \frac{a}{2}} \right) = D_0 J_0(\pi_2), \\ B_0 (Q_0'(\pi_1) + \beta J_0'(\pi_1)) + J_0'(\pi_1) \left(\alpha + e^{-i k_1 \frac{a}{2}} \right) = D_0 \xi J_0'(\pi_2), \end{cases}$$

wo der Kürze halber gesetzt wurde:

$$(39') \quad \begin{cases} \alpha = \alpha_0 a_{00} - \alpha_1 a_{10} + \dots = \alpha_0 Q_0(k_1 a) - \alpha_1 Q_1(k_1 a) + \dots, \\ \beta = \beta_0 a_{00} - \beta_1 a_{10} + \dots = \beta_0 Q_0(k_1 a) - \beta_1 Q_1(k_1 a) + \dots \end{cases}$$

Die Gleichungen (39) vereinfachen sich noch bedeutend, wenn man voraussetzt, daß der Metalldraht so fein ist, daß man nicht nur π_1 , sondern auch π_2 als klein betrachten darf. Mit Hilfe der bekannten Formeln für die Werte der Zylinderfunktionen bei kleinen Argumenten erhält man dann:

$$(39'') \quad \begin{cases} B_0 \left(\log \frac{2}{\gamma \pi_1} + \beta \right) + \alpha + e^{-i k_1 \frac{a}{2}} = D_0, \\ B_1 \cdot \frac{1}{\pi_1} + \frac{\pi_1}{2} \left(\alpha + e^{-i k_1 \frac{a}{2}} \right) = D_0 \xi \frac{\pi_2}{2}. \end{cases}$$

Die Ausschläge des mit dem Thermoelemente verbundenen Galvanometers sind der in demselben während der Zeiteinheit entwickelten Wärmemenge proportional. Ist der Drahtradius sehr klein, so ist der Strom auch bei diesen schnellen Schwingungen über den Querschnitt gleichmäßig verteilt, und die Angaben des Galvanometers dürfen als Maß für den zeitlichen Mittelwert des Quadrates der Stromintensität, oder auch des Quadrates der im Innern des Drahtes herrschenden elektrischen Kraft betrachtet werden. Für dieselbe folgt nun aus der Gleichung (35) in der hier benutzten Annäherung:

$$(40) \quad \mathfrak{E}_2'' = D_0 e^{i\omega t},$$

wo D_0 durch die Gleichungen (39') bestimmt wird. Mit Berücksichtigung der letzten Gleichung (37), in der wir der Einfachheit halber $\mu_1 = \mu_2'' = 1$ setzen wollen, erhält man für D_0 folgenden Ausdruck:

$$(40') \quad D_0 = \left(1 + \frac{\pi_2^2}{2} \log \frac{2}{\gamma \pi_1} + \beta \right) \left(e^{-i k_1 \frac{a}{2}} + \alpha \right).$$

Aus der Gleichung (38) sieht man, daß es die mit β_n behafteten Glieder sind, die der Rückwirkung des Thermoelementes auf den vorderen Zylinder entsprechen, nach Vernachlässigung derselben bekommt man nämlich für A_n denselben Ausdruck, als ob die Beugung nur am vorderen Zylinder erfolgen würde. Der durch die Gleichung (40') gegebene Wert von D_0 lautet dann:

$$(41) \quad D_0 = \left(1 + \frac{\pi_2^2}{2} \log \frac{2}{\gamma \pi_1} \right) \left(e^{-i k_1 \frac{a}{2}} + \alpha \right),$$

und daraus folgt für die elektrische Kraft im Innern des Drahtes:

$$(41') \quad \bar{\mathfrak{E}}_2'' = D_0 e^{i\omega t}.$$

Wir wollen diesen Ausdruck den „theoretischen Wert der Feldintensität“ nennen; erfolgt nämlich die Beugung nur am vorderen Zylinder, so ist die Feldintensität in der Entfernung a hinter dem Zylinder gleich:

$$\begin{aligned} & \left(e^{-i k_1 \frac{a}{2}} + \alpha_0 Q_0(k_1 a) - \alpha_1 Q_1(k_1 a) + \dots \right) e^{i\omega t} \\ & = \left(e^{-i k_1 \frac{a}{2}} + \alpha \right) e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

und aus den Gleichungen (41) und (41') sieht man, daß \bar{E}_2'' derselben proportional ist; der Proportionalitätsfaktor hängt nur von den Konstanten des Drahtes und von der Wellenlänge ab, nicht aber von der Entfernung des Drahtes vom vorderen Zylinder.

Die Messungen dagegen beziehen sich auf den durch die Gleichung (40) gegebenen Wert von E_2'' ; für das Verhältnis beider Werte erhält man:

$$\frac{E_2''}{\bar{E}_2''} = 1 + \frac{\pi_2^2}{2} \beta.$$

Da nun durch die Messungen die zeitlichen Mittelwerte bestimmt werden, so setzen wir:

$$\frac{E_2''}{\bar{E}_2''} = M + i N;$$

das Verhältnis q zwischen dem beobachteten und dem theoretischen Werte ist dann:

$$q = M^2 + N^2.$$

Wir wollen diesen Ausdruck noch vereinfachen. Ist der Radius des vorderen Zylinders auch klein gegen die Wellenlänge, so darf man in erster Annäherung setzen:

$$\beta = \beta_0 a_{00} = - \frac{G_0}{H_0} Q_0^2 (k_1 a),$$

und beschränkt man sich auf Punkte, die nicht allzu nahe an der Oberfläche des vorderen Zylinders liegen, so folgt:

$$\beta = \frac{i \lambda}{4 a} \frac{G_0}{H_0} e^{-2 i k_1 a}.$$

Es sei nun:

$$\frac{G_0}{H_0} = r e^{i \psi},$$

weiter folgt aus Gleichung (3), daß $\pi_2^2 = k_1''^2 \rho''^2$ negativ imaginär, also $i \pi_2^2$ positiv reell ist; wir bezeichnen es mit p^2 . Nach einer einfachen Rechnung erhält man dann für q folgenden Wert:

$$q = 1 + \frac{r p^2}{4} \frac{\lambda}{a} \cos \left(\frac{4 \pi}{\lambda} a - \psi \right);$$

die Größen von der Ordnung p^4 sind hier, wie überall, vernachlässigt.

Man sieht also, daß sich das Verhältnis zwischen dem beobachteten und dem theoretischen Werte periodisch ändert; die Periode ist gleich $\lambda/2$. Die Lagen der Maxima bzw. Minima sind durch die Gleichung:

$$(42) \quad \frac{4\pi}{\lambda} a = 2n\pi + \psi,$$

bzw.

$$(42') \quad \frac{4\pi}{\lambda} a = (2n+1)\pi + \psi$$

bestimmt, sind also von den Konstanten des Thermoelementes unabhängig, da ψ nur von der Beschaffenheit des vorderen Zylinders abhängt.

Ist der vordere Zylinder dielektrisch, so ist ψ für $\lim \varrho' = 0$ gleich π , mit wachsendem ϱ' nimmt es ab. Aus den Gleichungen (42) und (42') folgt dann, daß sich die Maxima und Minima zu kleineren Werten von a verschieben, wenn der Radius des vorderen Zylinders wächst. Ist dagegen der vordere Zylinder ein guter Leiter, so findet das Umgekehrte statt; für $\lim \varrho' = 0$ ist nämlich ψ Null und mit wachsendem ϱ' nimmt es zu.

Tabelle II.

$\epsilon = 81$, $\varrho'' = 5 \cdot 10^{-4}$ cm, $\lambda = 62,8$ cm.

a	$\varrho' = 0,8$ cm			$\varrho' = 1,2$ cm		
	Theoret. Wert der mittleren Feldint.	Beob. Wert der mittleren Feldint.	q	Theoret. Wert der mittleren Feldint.	Beob. Wert der mittleren Feldint.	q
4 cm	1,848	2,414	1,306	0,273	0,371	1,357
7	1,448	1,747	1,212	0,218	0,255	1,171
10	1,282	1,414	1,103	0,227	0,218	0,959
15	1,147	1,120	0,976	0,278	0,252	0,908
20	1,076	1,003	0,932	0,327	0,309	0,945
25	1,040	0,997	0,959	0,369	0,374	1,013
30	1,017	1,027	1,010	0,405	0,426	1,051
35	1,002	1,043	1,041	0,436	0,452	1,036
40	0,991	1,028	1,082	0,462	0,459	0,994
50	0,979	0,953	0,974	0,505	0,492	0,973
60	0,971	0,970	0,999	0,538	0,550	1,022
70	0,963	0,983	1,020	0,564	0,566	1,003
85	0,962	0,946	0,983	0,599	0,596	0,995
100	0,961	0,976	1,015	0,626	0,630	1,007

In der vorstehenden Tab. II sind zwei Fälle berechnet worden: Wasserzylinder vom Radius $\rho' = 0,8$ cm bei der Wellenlänge $\lambda = 62,8$ cm und Wasserzylinder vom Radius $\rho' = 1,2$ cm bei derselben Wellenlänge. Das Thermoelement ist durch einen Platindraht ($\sigma = 6,2 \cdot 10^{16}$ elektrostat. Einh.) vom Radius $\rho'' = 5 \cdot 10^{-4}$ cm ersetzt. Von den Messungen, die Grossmann¹⁾ durchgeführt hat, sind mit den hier berechneten Fällen am besten Wasserzylinder vom Radius 0,74 cm und 0,98 cm bei der Wellenlänge $\lambda = 58$ cm zu vergleichen. Die Übereinstimmung mit der Theorie ist ziemlich gut. Die Maxima und Minima liegen an gleichen Stellen; mit wachsendem Radius des Wasserzylinders zeigt sich eine deutliche Verschiebung des ersten Minimums zu kleineren Werten von a , wie es die Theorie verlangt. Die Amplituden der periodischen Änderungen, so wie sie Grossmann beobachtet hat, sind viel größer als die hier berechneten; dies läßt sich bei der Konstruktion des Klemenčičschen Thermoelementes, das außerdem auf den Erreger abgestimmt war, erwarten.

Prag, 8. Februar 1913.

1) Cl. Schaefer u. F. Grossmann, l. c. p. 497.

(Eingegangen 10. Februar 1913.)

net
en-
em
rch
ius
n¹⁾
am
bei
in-
nd
ius
ng
die
de-
iel
n-
er-

Erläuterung der Reproduktionen.

Das Sauerstoff-Serientriplet 3947,438, 3947,626, 3947,781 in höheren
Magnetfeldern.

Linke Spalte, Bild 1—4 beide Schwingungen.

Rechte „ „ 5—6 senkrechte Schwingungen.

Bild 1 und 3, III. Gitterordnung 4,37 fach vergrößert,

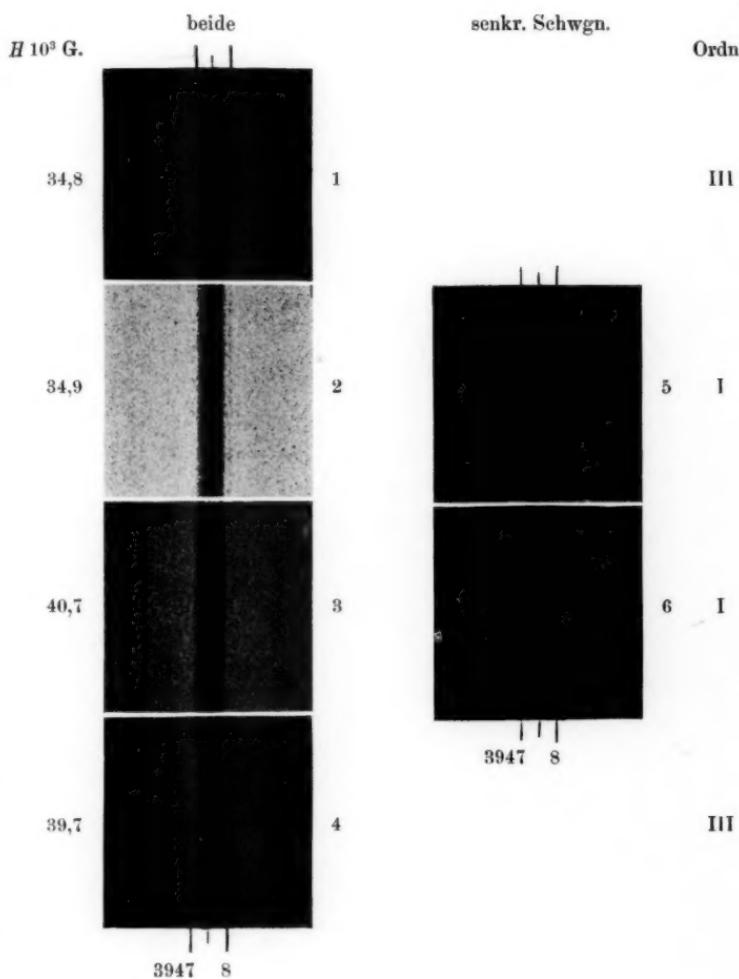
Bild 2, 3, 5, 6, I. Gitterordnung 11,28 fach vergrößert.

Auf allen Bildern 1 mm = 0,20 Å.-E.

Bild	Aufnahme	Ordn.	H. G.	
1	XXI	III	34790	stärkste Aufnahme
2	XIII	I	34925	
3	XVIII	I	40780	
4	XVI	III	39747	gleich starke Aufnahmen
5	XIV	I	34946	
6	XX	I	39594	

Die zwei entfernten schwachen Komponenten sind in 1 und zum Teil
in 2 und 5 sichtbar, in 3 und 4 nicht mehr.

Besonders auf 3 und 6 sichtbar ist das Zeemanquartett der Sauerstoff-
Funkenlinie 3945,8 Å.-E.



1000

1913.

No. 5.

MAY 20 1913
UNIV. OF MICH.

ANNALEN DER PHYSIK.

ERGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 40. Heft 5.

DER GANZEN REIHE 245. BANDES 5. HEFT.

KÜRATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT EINER TAFEL.



LEIPZIG, 1913.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.
DÖRRIENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 15 Heften (= 8 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.

(Ausgegeben am 29. April 1913.)

Inhalt.

	Seite
1. Karl Willy Wagner. Zur Theorie der unvollkommenen Di-elektrika	817
2. Gunnar Nordström. Träge und schwere Masse in der Re-lativitätsmechanik	856
3. Felix Stumpf. Die elastischen Konstanten von Quarzglas .	879
4. E. Henschke. Über eine Form des Prinzips der kleinsten Wirkung in der Elektrodynamik des Relativitätsprinzips .	887
5. Ernst Dibbern. Quantitative Untersuchungen über Koppe-lungswellen mittels des Helmholtzschen Pendelunterbrechers .	935
6. F. Paschen und E. Back. Normale und anomale Zeeman-effekte. Nachtrag. (Hierzu Tafel I).	960
7. A. Timiriazeff. Über die innere Reibung verdünnter Gase und über den Zusammenhang der Gleitung und des Temperatur-sprunges an der Grenze zwischen Metall und Gas	971
8. Karl F. Lindman. Über sekundäre elektrische Schwingungen .	992
9. Franz Záviška. Über die Beugung elektromagnetischer Wellen an parallelen, unendlich langen Kreiszylindern	1028

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleicherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte druckfertig einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 Sonderabdrücke jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhand-lungen oder Übersetzungen derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die Zeichnungen sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manu-skript selbst einzusechuen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahresszahl aufzuführen.

Fr. Klingelfuss & Co.
Basel.

Aerodynamisches Instrumentarium

**zu Demonstrations- u. Messzwecken
nach Dr. H. Zickendorf.**

Großer Luftwiderstandsapparat mit
elektrisch angetriebenem Ventilator zur
Untersuchung und Demonstration der
Luftwiderstandsgesetze.

Manometrische Sonde (Schweiz. Muster-
schutz No. 18934, D.R.G.M. No. 451519)
mit Druckluftbelle (nach Toepler) für Pro-
jektion und direkte Ablesung, zur Aus-
wertung des aerodynamischen Feldes um-
strömter Körper, in Verbindung mit dem
Koordinatenapparat.

Vgl. Ann. d. Physik 1911 Heft 6.
Verhandl. d. Basler Naturf. Ges. Bd. XXI p. 42
(1910) u. Bd. XXII Heft 1 (1911).

Manometrische Sonde.

Elektrometer nach

**Prof. H. W. Schmidt für
Laboratorium und
Reise**

**Zur Messung des Radiumgehaltes von Quellen
und festen Körpern.**

Radiumnormallösung

**zum Eichen von Elektrometern
nach Prof. H. W. Schmidt**

**Spindler & Hoyer
Göttingen**

Prospekte gratis



Arthur Pfeiffer, Wetzlar O

Werkstätten für Präzisionsmechanik und Optik, gegr. 1890.

Größte Spezial-Fabrik für Luftpumpen
zu wissenschaftlichen Zwecken.

Rotierende Quecksilber-Hochvakuum-Pumpen
System Pfeiffer, D. R. P.

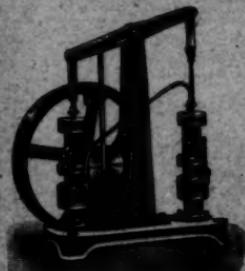


Hochvakuum-
Apparate
zur
Demonstration
und zu
wissenschaftlichen
Untersuchungen.

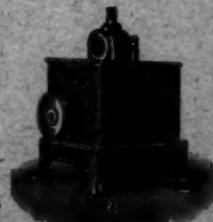
Neu-
konstruktionen
nach Angabe.



Hochvakuum-Meß-Apparate aller Konstruktionen.
Goryk-Öl-Luftpumpen, D. R. P. Rotierende Öl-Luftpumpen, D. R. P.



Alle Arten von
Luftpumpen:
Trockene rotierende
Luftpumpen,
Trockene Schieber-
luftpumpen,
Quecksilberluftpumpen
aller Systeme,
Kompressionsluftpumpen.



Eigene Spezial-Fabrikation von Funkeninduktoren von 4-1000"-/-
Funkendlänge

Eingetragene
Fabrik-Marke



Induktoren
mit Demo-
nstra-
tions-
schaltung.

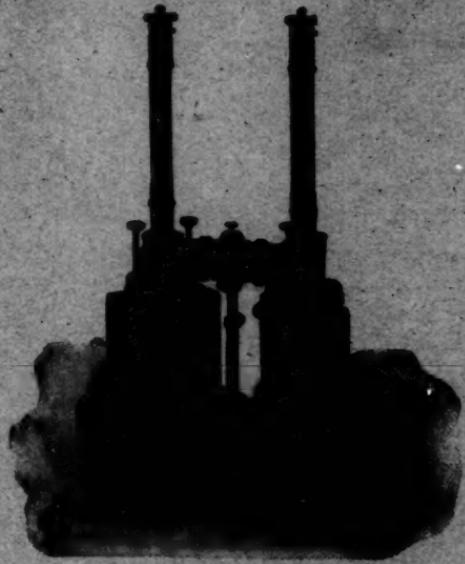
Alle
Nebenapparate.

Funkeninduktor

Listen auf Verlangen!

Siemens & Halske A.-G.
Werke
Berlin-Nordendamm.

Doppelspiegelgalvanometer



Doppelspiegelgalvanometer mit Umkehrprisma
Größe: 260 x 140 x 390 mm

**Doppelspiegelgalvanometer
nach Saladin**

HARTMANN & BRAUN

A.G. FRANKFURT A.M.



Ablesefernrohre,
Stative, Fernrohrträger,
Skalenlaternen,
Galvanometerspiegel,
Skalen, Skalenhalter.

Man verlange Liste L.

Nebenstehend: Ablesefernrohr
mit Universal - Fernrohrträger
auf Gauss'schem Stativ.



Dr. H. Geissler Nachf. Frz. Müller, Bonn a. Rh.

Fabrik chem. u.
physik. Apparate.

Spezialitäten: Elekt. Röhren



Geissler-Manometer.

Manometer nach Mc.Leod und Kahlbaum

Rowlands Glitter

Quecksilberpumpen

Gasanalysen-Apparate

Elektrolytische Apparate n. Prof. v. Hofmann

Normal-Thermometer

Thermometer nach Beckmann

Thermometer-Sätze nach Gräbe-Anschütz

Präzisions-Meßgeräte und Aräometer u. u. u.

Vacuumthermosäule nach Pfüger

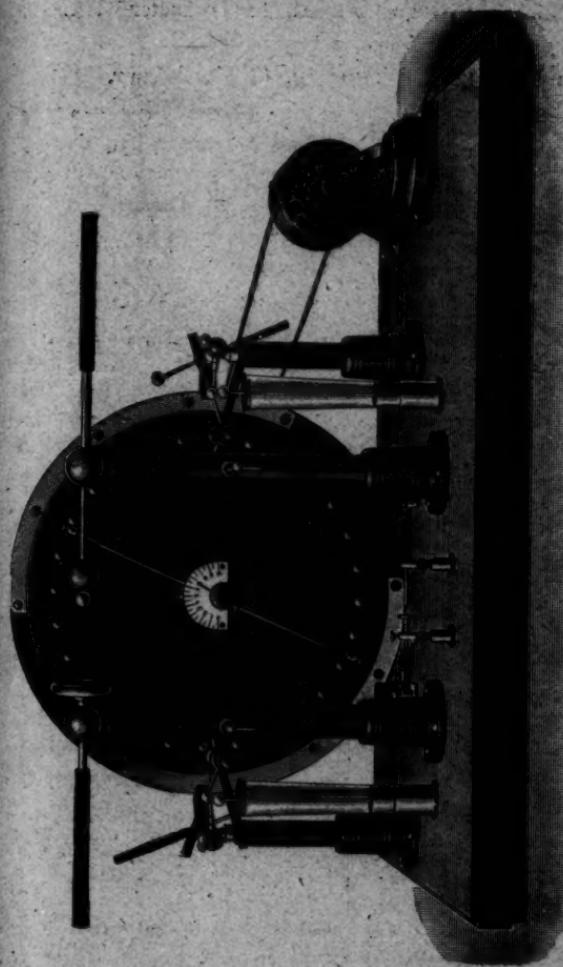
Spectrometer

Kathometer

Fein geschliffene Hähne

zu Kataloge auf Verlangen.

Alfred Wehrsen, Berlin 0. 33



Liefert präzisende Funken (wie ein Induktor)
reinen Gleichstroms in der Länge vom halben
Scheibendurchmesser.

Die beste Maschine der Gegenwart

Wissen und Können

Sammlung von Einzelschriften aus reiner und angewandter Wissenschaft
herausgegeben

von Prof. Dr. B. Weinstein, Charlottenburg.

Münchener Neueste Nachrichten. . . . Von den vielen populärwissenschaftlichen Büchern, die in unserer Zeit täglich erscheinen, verdienen die von Prof. Weinstein herausgegebenen Bücher besonderes Interesse. Die Thematik, die hier behandelt werden, sind eng umgrenzt, sind von namhaften Autoren mit alter Strenge und Gründlichkeit bearbeitet, von wissenschaftlichem Geist getragen und in leichtverständlicher Sprache behandelt.

Pädagogische Werte: Diese neue von Prof. Dr. B. Weinstein herausgegebene Sammlung von Einzelschriften aus reiner und angewandter Wissenschaft bietet sich Fachkäufern, daneben aber auch gebildeten Laien an, die sich auf abhängigen Gebieten rasch unterrichten wollen. Durch die beiden vorliegenden Bücher hat sie sich bestens eingeführt. Verbürgen schon die Verfasser ihren inneren Wert, so soll doch noch besonders hervorgehoben werden, daß die Stoffe nicht nur durchaus wissenschaftlich, sondern auch sehr klar und ansprechend behandelt und den Lehrer zwar nicht ohne geistige Anstrengung aber doch auch mit steigendem Interesse in den bearbeiteten Gebieten orientieren. Wir zweifeln nicht, daß die Sammlung rasch Eingang in weitere Kreise finden wird.

Bisher erschienen folgende Bände:

Bd. 1: Prof. Dr. W. Ostwald, Die Energie. 197 S. Geb. M. 5.40.

Bd. 2: Dr. Richard Hennig, Die älteste Entwicklung der Telegraphie und Telephonie. VIII, 190 S. Mit 61 Abb. Geb. M. 4.—.

Bd. 3: Margaret Werner Morley, Von Lohnen. Ein Blick in die Wunder des Werdens. Deutsch von Marie Landmann. Autorisierte Übersetzung. Mit Abb. von der Verfasserin und von Rob. Forayth. VI, 100 S. Geb. M. 3.00.

Bd. 4: Ingenieur O. Neur, Die Radio-Telegraphie. Gemeinfertl. dargestellt. VIII, 271 S. Mit 154 Abb. Geb. M. 5.—.

Bd. 5: Ingenieur Max Bush, Die Automobiltechnik. VI, 148 S. Mit 150 Abb. Geb. M. 4.—.

Bd. 6: Dr. W. Bain, Elemente und Akkumulatoren. Ihre Theorie und Technik. VI, 208 S. Mit 98 Abb. Geb. M. 4.40.

Bd. 7: Dr. P. Vageler, Die mineralischen Nährstoffe der Pflanze. IV, 130 S. Mit 8 Abb. Geb. M. 2.—.

Bd. 8: Dr. P. Vageler, Sauerstoff, Wasserstoff, Kohlenstoff und Stickstoff als Pflanzennährstoffe. IV, 142 S. Mit 11 Abb. Geb. M. 2.—.

Bd. 9: Prof. Dr. W. Foerster, Über Zeitmessung und Zeitregelung. IV, 114 S. Geb. M. 2.—.

Bd. 10: Theodor Wolff, Von Ochsenwagen zum Automobil. Geschichte der Wagenfahrzeuge und des Fahrwesens. VIII, 170 S. Mit 34 Abb. Geb. M. 2.80.

Bd. 11: Dr. Chr. Riss, Das Licht in seinen elektrischen und magnetischen Wirkungen. Versuchsergebnisse, Theorien und Literatur. VII, 263 S. Mit 69 Abb. 1908. Geb. M. 5.—.

Bd. 12: O. Nahr, Konstruktions-Ingenieur am Elektrotechnischen Laboratorium der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin. Die elektrische Arbeitsübertragung. VII, 260 S. Mit 144 Abb. 1908. Geb. M. 5.—.

Bd. 13: E. Monig, Bahnen des Weltverkehrs. VIII, 304 S. Mit 25 Kartenzeichnungen. 1908. Geb. M. 5.—.

Bd. 14: J. Scheiner, Spektralanalytische u. photometrische Theorien. IV, 190 S. Mit 11 Fig. 1909. Geb. M. 6.—.

Bd. 15: Ed. Hennig, Erdbebenkunde. VI, 174 S. Mit 24 Abb. 1908. Geb. M. 4.—.

Bd. 16: K. Günther, Geschichte der Handfeuerwaffen. XI, 181 S. Mit 181 Abb. u. Tabellen. 1909. Geb. M. 4.—.

Bd. 17: W. Ostwald, Die Entwicklungsgeschichte der Elektrochemie. IV, 206 S. m. 4 Abb. 1910. Geb. M. 5.60.

Bd. 18: F. Auerbach, Die Grundlagen der Musik. VI, 200 S. mit vielen Abb. 1911. Geb. M. 5.—.

Bd. 19: B. Weinstein, Die Grundgesetze der Natur und die modernen Naturwissenschaften. VIII, 270 S. 1911. Geb. M. 6.—.

Bd. 20: H. Thurn, Die Verkehrs- und Nachrichtenmittel im Kriege. VII, 276 S. mit 22 Abb. u. Skizzen. 1911. Geb. M. 6.—.

Bd. 21: Chr. v. Hofe, Formopik. VI, 190 S. mit 117 Abb. 1911. Geb. M. 5.—.

Wird fortgesetzt. Prospekt auf Verlangen kostenfrei.

Stationen und Apparate für Drahtlose Telegraphie und Telephonie

Lichtbogengeneratoren

Funkenstrecken

Antennenanlagen

Leydener Flaschen

Flaschenanschlüsse

Kondensatorbatterien

Drehkondensatoren

Glimmerkondensatoren

Selbstinduktionen

Hörempfangsapparate

Variometer

Transformatoren

Lichtschreiber

Thermoelektratoren

Demonstrationsapparate

Hochspannungsschalter

Hochspannungsisolatoren

Sämtl. Hilfsapparate

DR. ERICH F. HUTH G.M.B.H.

Erdmannshof, Kottbuser Ufer 39/40, Berlin S.O. 26.

Neu!

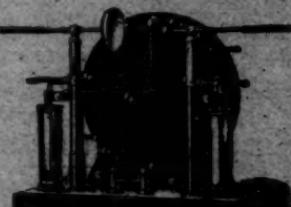
Die stärkste und beste
Influenzmaschine ist die

Neu!

Wommelsdorfsche Kondensatormaschine

D. R. Pat. — Auslandspatente

Illustrierte Preisliste gratis und
franko — Glänzende Anerken-
nungen — Ein
ideales Lehrmittel



Ein universeller
Laboratoriums-
generator — Rönt-
gentechnik —
Therapie — Mit
Motor oder Hand-
antrieb

Mit 1 bis 10 röllig. Scheiben von 9 bis 56 cm Durchm. im Preise von 16 bis 2600 M.

Alle Influenz- und Starkstrommaschinen sind hierdurch veraltet.
Ein- und mehrplattig

Berliner Elektros Gesellschaft m. b. H.

Berlin-Schöneberg, Feurigstraße 54

**Ateliers E. DUCRETET (F. DUCRETET & E. ROGER) Succ^{rs}.
PARIS — 75 rue Claude-Bernard 75 — PARIS**

GRANDS PRIX { PARIS 1889 — Barres 1894 — Bruxelles 1897 — PARIS 1900
St. Louis 1904 — Liège 1905 — Milan 1906, Membre du Jury

CABINETS DE PHYSIQUE COMPLETS (Catalogues Illustrés)

TELEGRAPHIE SANS FIL: Les procédés de T. S. F. DUCRETET avec dispositifs d'accord, sont maintenant utilisés pour les grandes distances aussi bien en France qu'à l'Etranger. (Tarifs spéciaux à la demande.)

TELEPHONES HAUT-PARLEURS (Brevets Ducretet)

MIROPHONE PUISSANT GAILLARD-DUCRETET

TELEMICROPHONOGRAPE DUCRETET

Transformateur électrolytique de Paris, redresseur des courants alternatifs.

**F. SAR
GOETT**

Die Sartorius-Werke
Analysen-, Präzisions-
für alle chemischen
40 jähr. wissenschaftliche
sowie eine ganze Reihe
„Spezial-Konstruktionen“
Hindlichkeit und schnellste
hoher Stabilität der Fabri-

Neueste Spezial-
„SCHNELLWAAGE“.

Unsere Fabrikate sind
alle einschlägigen

**TORIUS
INGEN**

in Göttingen liefern:
wagen und Gewichte
u. technischen Zwecke.
u. praktische Erfahrungen,
patentamtlich geschützter
garantieren höchste Emp-
Schwingungsdauer bei
kate. Prospekt P. 7 gratis,
Konstruktion
unerreicht in ihrer Art.
zu Originalpreisen in
Geschäften erhältlich.

Verein. Werkstätten f. wissensch. Instrumente v. F. Sartorius. A. Becker u. L. Tesdorff

Verlag von Johaun Ambrosius Barth in Leipzig.

Soeben erschien:

Radakowic, Dr. M., Professor in Czernowitz, Über die Bedingungen für die Möglichkeit physikalischer Vorgänge. (Das Gesetz der Erhaltung der Energie und das Gesetz der Vermehrung der Entropie.) Volkstümliche Vorträge gehalten an der Universität Czernowitz. VI, 56 Seiten mit 5 Figuren im Text. 1913. M. 1.40

Bei dem großen Interesse für die Erkenntnisse der Natur dürfen die vorliegenden volkstümlichen Vorträge auch für weitere Kreise Interesse haben. Der Verfasser hat es verstanden, bei aller Wissenschaftlichkeit sich doch populär auszudrücken.

Otto Wolff, Werkstatt für elektrische Messinstrumente

Berlin W., Carlsbad 15.

Spezialität seit 1890

Präzisions-Widerstände a. Manganin

nach der Methode
der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.

(Vergl. Zeitschrift für Instrumentenkunde,
Juli 1898, Januar 1899, Nov.-Dezember 1899.

Kernwiderstände von 100 000—0,0001 Ohm
für genaue Widerstandvergleichungen und
für Strommessungen b. 10 000 Amp. Rheostat,
Widerstandsscheibe, Thermoscheibe, Doppel-
drähte für alle Meßbereiche mit Stöpsel- od.
Kurbelschaltung, in jeder gewünschten Aus-
führung. — Kompressionsapparate für genaue
Spannungsmessungen. — Kompressionsapparate
zusätzlich Widerstandsscheibe. — Normalwiderstände,
beginnend von der Physik.-Techn. Reichs-
anstalt. — Sämtliche Widerstände auf Wunsch
als Präzisionswiderstände hergestellt. — Ver-
kaufslager von Manganin-Draht und Blech
von der Isolationshütte in Dillenburg.

Illustrierte Preisliste.



Ehrhardt & Metzger Nachf. (Inhaber: K. Friedrichs.)

— Darmstadt. —

Fabrik und Lager chemischer, elektrochemischer und physikalischer
Apparate und Gerätschaften.

Komplette Einrichtungen chemischer und physikalischer
Laboratorien. Mikroskopische Utensilien. Sterilisierungsapparate
Brutschränke. Resistanzglas. Weber'sches Glas. Jenaer und
Böhmisches Glaswaren.

Spezialapparate für Elektrochemie und Physik.

Mechanische Werkstätten. Tischlerei.

Chemikalien erster Firmen zu Originalpreisen.

Vieifache Aussichtnungen. — Export nach allen Weltteilen.

Präzisions-Reisszeuge

Präzisions-Sekundenpendel-Uhren

Nickelstahl-Kompensations-Pendel

Grand Prix: Paris 1900, St. Louis 1904,
Lüttich 1905, Brüssel 1910, Turin 1911.

Die echten Rieflerinstrumente sind
mit dem Namen Riefler gestempelt.

Monochromatischer Beleuchtungsapparat

für das

Ultra-Violett.

Bewährte Einrichtung für
Versuche bezüglich der
Photo-Elektrischen Wirkung.

Kalibriert in Wellenlängen
bis $1 200 \mu\mu$.

Eine ausführliche Beschreibung
wird auf Verlangen gratis u. franko
gern zugestellt.

Adam Hilger, Ltd., 75a Camden Road,
London, N.W.

Telegraph-Adresse :
"Sphericity, London".



Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig

Lehrbuch der Experimentalphysik

von

E. v. Lommel.

17.—19. neu bearbeitete Auflage,
herausgegeben von Prof. Dr. Walter König.

X, 644 Seiten mit 441 Figuren und Spektraltafel.

1911. M. 6,60,- geb. M. 7,50.

„Literar. Beilage“ zur „Hess. Schulzeitung“. Bei der Vorbereitung zur Mittelschullehrerprüfung kann es, wie ich aus Erfahrung sagen kann, vorzügliche Dienste leisten. Es ist in breiter, allgemein verständlicher Darstellung, speziell für das Selbststudium geschrieben und sucht an Klarheit seinesgleichen.

Spektralröhren

neue Form nach Dorn
für Quer- und Längs-
durchsicht und zur Be-
obachtung des Anoden-
oder Kathodenlichtes.
Mit Zylinderelektroden
und allen Gasen und
Edelgasen



Infolge neuer
Darstellungsmethoden
mit

Neon

Mark 18,-

Vakuumröhren
Physik-chemi-
sche Apparate
Thermometer
Normal-Meß-
geräte

Leipziger Glasinstrumentenfabrik Robert Goetze, Leipzig, Kärtelstr. 4

Eigene Filialwerkstätte in Halle a. S., Bergstr. 6

Glastechnisch-mechanische Werkstätten

R. Burger & Co., Berlin N. 4.



Chausseestrasse 8.

Telephon: Amt III 171.
Telegramm-Adr.: Vakuum-
glas Berlin.

Salônes Metallique 1904 St. Legis
König-Wilhelm 1904 Holland

Spezialfabrik
für
physikalische Glasapparate
und Instrumente.

Schwimmer zur
Bestimmung der Tem-
peratur flüssiger Luft.

Preisliste gratis und franko.

Franz Müller & Co., Frankfurta. M.,

Anfertigung u. Lager chem.-physik.,
bakteriologischer Glasapparate und Utensilien.



Werkstätten für glastechn. Prälzisions-Appar., chem. Meßgeräte,
Thermometer für Laboratoriums- u. Fabriksgebrauch, Gasunter-
suchungsapparate, Wiborghs Schwefel-Bestimmungsapparate, Cad-
miumscheiben u. Farbenskalen, Quecksilberpumpen, Vaporimeter,
Ärömometer, Präzis.-Glashähne, Differential-Manometer n. Dr. König,
elektr. Röhren n. Geissler, Crookes, Braun, Röntgen, Goldstein.
Apparate nach spez. Zeichnungen.

Kataloge kostenlos

LEHRBUCH
DER
THERMODYNAMIK

IN IHRER ANWENDUNG AUF DAS
GLEICHGEWICHT VON SYSTEMEN
MIT GASFÖRMIG-FLÜSSIGEN PHASEN

NACH VORLESUNGEN VON

DR. J. D. V. D. WAALS

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT AMSTERDAM

IN 2 TEILEN BEARBEITET VON

DR. PH. KOHNSTAMM

Erster Teil.

XII, 287 Seiten. 1908. Preis gebunden M. 12.—.

Zweiter Teil.

XVI, 646 Seiten mit 205 Abbildungen im Text.
1912. Preis gebunden M. 24.—.

Physikalische Zeitschrift: Der Inhalt des vorliegenden Werkes deckt sich nach Angabe des Vorwortes von van der Waals im wesentlichen mit dessen Vorlesungen über Thermodynamik, die hauptsächlich den Zweck haben, Resultate eigener Untersuchungen zu geben. Schon daraus geht hervor, daß man es hier mit einem Buche zu tun hat von großer Eigenart, das vielfach — um nicht zu sagen überall — andere Wege geht, als die bei uns üblichen Lehrbücher der Thermodynamik. Der Inhalt gliedert sich folgendermaßen: I. Abschnitt (Erster Hauptsatz und Anwendungen); II. Abschnitt (Zweiter Hauptsatz und Anwendungen); III. Abschnitt (Die Gleichgewichtsprinzipien und Anwendungen); IV. Abschnitt (Thermodynamische Theorie der Kapillarität). Es sei nur ganz allgemein bemerkt, daß in dem Werke hauptsächlich die Methoden der holländischen Schule angewandt werden, die von der Hand eines Meisters dargestellt zu sehen, für alle Fachgenossen von hohem Interesse sein dürfte.

